Disclaimer

Die Übungen die hier gezeigt werden stammen aus der Vorlesung *Logik und Logikprogrammierung*! Für die Richtigkeit der Lösungen wird keine Gewähr gegeben.

Aufgabe 1 . . . .

Emil hat seine Freunde Anne, Bernd, Christiane und Dirk auf eine Party eingeladen. Leider gibt es dabei einige Komplikationen.

1. Anne ist in Bernd verliebt und kommt nur mit, wenn Bernd auch kommt.
2. Bernd ist jedoch in Christiane verliebt und kommt nur, wenn Christiane auch kommt.
3. Zudem ist auch Dirk in Christiane verliebt und, falls Christiane kommt, kommt Dirk auch.
4. Wenn Dirk mitkommt, wird er auf jeden Fall Anne oder Bernd mitbringen.
5. Christiane ist die Situation peinlich und kommt, falls sowohl Bernd als auch Dirk mitkommen, nicht mit.

(a) Formalisieren Sie die gegebenen Sachverhalte durch aussagenlogische Formeln.Hinweis: Die Motivationsgründe der einzelnen Personen können dabei vernachlässigt werden. Verwenden Sie die atomaren Formeln A für „Anne kommt mit", B für „Bernd kommt mit", C für „Christiane kommt mit" und D für „Dirk kommt mit".

(b) Argumentieren Sie, dass keiner der vier Freunde Emils zur Party mitkommt.

Aufgabe 2 . . . .

Sei $P = \{p_1, ..., p_k\}$ eine endliche, nicht-leere Menge atomarer Formeln. Wir können die Menge $AL(P)$ der aussagenlogischen Formeln über den atomaren Formeln aus P als eine formale Sprache über dem Alphabet $\sum = \{\bot, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, (,)\} \vee P$ auffassen.

(a) Zeigen Sie, dass $AL(P)$ nicht regulär ist.

(b) Zeigen Sie, dass $AL(P)$ jedoch kontextfrei ist, indem Sie eine kontextfreie Grammatik angeben, die $AL(P)$ erzeugt.

Aufgabe 3 . . . .

Zeigen Sie per vollständiger Induktion über den Formelaufbau, dass in jeder Formel die Anzahl der öffnenden Klammern gleich der Anzahl der schließenden Klammern ist, d.h. zeigen Sie, dass für alle endlichen Mengen atomarer Formeln $P = \{p_1, ..., p_k\}$ und alle $\phi \in AL(P)$, dass $|\phi|_(= |\phi|_)$ gilt.

Aufgabe 4 . . . .

Seien ϕ, ψ aussagenlogische Formeln. Wir sagen, dass ψ eine Teilformel von ϕ ist wenn ϕ (als syntaktisches Wort) ein Infix von ψ ist. Zum Beispiel ist p_1 eine Teilformel von $\neg(p_2 \wedge p_1)$, nicht aber $\neg($, da dies keine aussagenlogische Formel ist. Sei $TF(\phi)$ die Anzahl der Teilformeln von ϕ. Zeigen Sie per vollständiger Induktion über den Formelaufbau, dass für jede aussagenlogische Formel ϕ die Anzahl der Teilformeln von ϕ kleiner gleich der Länge von ϕ ist, also $TF(\phi) \leq |\phi|$.

Aufgabe 5 . . . .

Vervollständigen Sie die folgende Deduktion um die angewendeten Regeln, gestrichenen Hypothesen und fehlenden Formeln. Markieren Sie zudem für alle gestrichenen Hypothesen, durch welche Regelanwendung diese gestrichen wurden.

$$\dfrac{\dfrac{\phi \vee \psi \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\phi \wedge \neg\psi}{?}(\wedge E_1) \quad \phi}{?}(\neg E)}{\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)}(\neg I) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\phi \wedge \neg\psi}{?}(\wedge E_2) \quad \psi}{?}(\neg E)}{\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)}(\neg I)}{\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)}}{\neg B}$$

Aufgabe 6 ....

In Aufgabe 1 haben wir einen Sachverhalt durch folgende Formeln formalisiert:

$$A \to B, B \to C, C \to D, D \to (A \vee B), (B \wedge D) \to \neg C$$

Konstruieren Sie eine formale Deduktion von $\neg B$, die nur diese Formeln als Hypothesen nutzt (alle anderen Hypothesen sind gestrichen).

Aufgabe 7 ....

Wir wollen in dieser Aufgabe zeigen, dass in der Aussagenlogik sowohl Konjunktion als auch Disjunktion assoziativ sind. Seien dazu p_1, p_2, p_3 aussagenlogische Formeln.

(a) Zeigen Sie, dass $\{p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3)\} \vdash (p_1 \wedge p_2) \wedge p_3$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\{p1 \vee (p_2 \vee p_3)\} \vdash (p_1 \vee p_2) \vee p_3$ gilt, indem Sie die folgende Deduktion vervollständigen.

Aufgabe 8 ....

Werten Sie die folgenden Formeln für die jeweils angegebene Belegung aus.

(a) $p_1 \to (p_2 \wedge p_3)$ für die K_3-Belegung mit $B(p_1) = \frac{1}{2}, B(p_2) = 1$ und $B(p_3) = 0$

(b) $(p_1 \vee p_2) \to (p_2 \wedge p_3)$ für die F-Belegung mit $B(p_1) = 0.3, B(p_2) = 0.7$ und $B(p_3) = 1$

(c) $\neg(p_1 \to (p_2 \wedge p_3))$ für die B_R-Belegung mit $B(p_1) = \mathbb{R}, B(p_2) = [1, \pi]$ und $B(p_3) = [3, 42]$

(d) $p_1 \to (p_2 \wedge p_3)$ für die $H_{mathbbR}$-Belegung mit $B(p_1) = \mathbb{R}_{>0}, B(p_2) = (-10, 5)$ und $B(p_3) = (-20, -3)$

Aufgabe 9 ....

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben

(a) Entscheiden Sie welche der folgenden Paare $\Gamma \Vdash_W \varphi$ erfüllen. Beweisen Sie Ihre Behauptung zum Beispiel durch Angabe einer Wahrheitstabelle.
   i. $\Gamma = \{p_1 \to p_1\}, \varphi = p_1, W \in \{B, K_3\}$
   ii. $\Gamma = \{p_1 \to p_2, p_1\}, \varphi = p_2, W \in \{B, K_3\}$
   iii. $\Gamma = \{p_3 \vee (p_1 \wedge p_2)\}, \varphi = (p_3 \vee p_1) \wedge (p_3 \vee p_2), W \in \{B\}$

(b) Entscheiden Sie für $W \in \{B, K_3\}$, welche der folgenden Formeln W-Tautologie sind. Beweisen Sie Ihre Behauptung.
   i. $\neg(p_1 \wedge \neg p_1)$
   ii. $\neg(p_1 \wedge \bot)$
   iii. $(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \to (p_1 \to (p_2 \to p_3))$

Aufgabe 10 ....

Wir erweitern die Aussagenlogik um den zweistelligen Operator $\bar{\wedge}$ (nicht . . . und . . .).

(a) Überlegen Sie sich, wie Sie eine Aussage „nicht (φ und ψ)" beweisen bzw. in einem Beweis verwenden würden und geben Sie entsprechende Regeln ($\bar{\wedge}I$) und ($\bar{\wedge}E$) an. Hinweis: Orientieren Sie sich für ($\bar{\wedge}E$) an der Regel ($\vee E$) und nutzen Sie, dass $\varphi \bar{\wedge} \psi \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$.

(b) Verwenden Sie die Regel aus Aufgabenteil (a), um zu zeigen, dass $p_1 \bar{\wedge} \neg p_1$ ein Theorem ist.

(c) Beschreiben Sie die Semantik des Operators durch Angabe einer Funktion $\bar{\wedge}_W$ wie auf den Folien 3.9ff für die Wahrheitswertebereiche $W \in \{B, B_R, K_3, F\}$.

(d) Überprüfen Sie, ob die Formel $(p_1 \to p_2) \bar{\wedge} \neg p_1$ eine W-Tautologie ist für $W \in \{B, K_3, B_R\}$.

(e) Angenommen wir erweitern die Regeln des natürlichen Schließens um ($\bar{\wedge}I$) und ($\bar{\wedge}E$). Geben Sie zum Beweis des Korrektheitslemmas für das natürliche Schließen und den Wahrheitswertebereich B den Induktionsschritt für diese Regeln an.

(f) Zeigen Sie per vollständiger Induktion über den Formelaufbau, dass es zu jeder aussagenlogischen Formel φ eine Formel ψ gibt, die nur $\bar{\wedge}$ als Operator enthält und äquivalent zu φ ist, $\varphi \equiv \psi$.

Aufgabe 11 ....

Zeigen Sie (kurz) die folgenden Aussagen.

(a) Die Formelmenge $\{\varphi\}$ ist erfüllbar genau dann, wenn $\neg\varphi$ kein Theorem ist.

(b) Wenn φ eine F-Tautologie ist, dann ist $\bot$ eine Teilformel von φ.

(c) Das natürliche Schließen ist auch ohne die Regel $(\bot)$ vollständig.

(d) Für jede aussagenlogische Formel φ gibt es unendlich viele, paarweise verschiedene, äquivalente Formeln.

Aufgabe 12 ....

Sei $T = (V, E, w)$ ein endlich verzweigter Baum mit Wurzelwund unendlich vielen Knoten.

(a) Beschreiben Sie mit einer Formelmenge Γ_T, dass in T ein unendlicher Pfad von der Wurzel aus existiert. Verwenden Sie atomare Formeln $\{p_v | v \in V\}$, wobei p_v die intendierte Bedeutung „der Knoten v liegt auf einem unendlichen Pfad von der Wurzel aus" hat.
Hinweis: D.h. Γ_T ist eine Formelmenge, sodass die unendlichen Pfade von w aus in T genau die sind, die die Form $\{v | B(p_v) = 1\}$ haben für eine passende Belegung B mit $B(\gamma) = 1$ für alle $\gamma \in \Gamma_T$.

(b) Verwenden Sie den Kompaktheitssatz der Aussagenlogik um zu beweisen, dass T einen unendlichen Pfad von der Wurzel aus besitzt.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass T beliebig lange Pfade von der Wurzel aus besitzt.

Aufgabe 13 ....

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben!

(a) Überprüfen Sie mittels Makierungsalgorithmus, ob die unten angegebene Folgerung gilt.

$$p_1 \wedge (p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_1 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee p_4) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \Vdash p_5$$

(b) Überprüfen Sie mittels Makierungsalgorithmus, ob die folgende Formel eine Tautologie ist.

$$(p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (p_4 \wedge \neg p_1) \vee (p_2 \wedge \neg p_4) \vee \neg p_2 \vee p_4$$

Aufgabe 14 ....

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben!

(a) Überprüfen Sie mittels SLD-Resolution, ob die unten angegebene Folgerung gilt.

$$p_1 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_4) \wedge (\neg p_1 \vee p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_6 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_2 \vee p_5 \vee \neg p_6) \Vdash \neg p_2 \vee (p_4 \wedge p_5)$$

(b) Überprüfen Sie mittels SLD-Resolution, ob die folgende Formel eine Tautologie ist.

$$(p_2 \wedge \neg p_1 \wedge p_3) \vee (p_4 \wedge p_1 \wedge p_3) \vee (\neg p_4 \wedge p_1 \wedge p_2) \vee \neg p_3 \vee \neg p_2$$

Aufgabe 15 ....

Leiten Sie die folgenden Äquivalenzen her, Sie können die Äquivalenzen auf Folie 5.13 verwenden.

(a) $a \to b \equiv \neg b \to \neg a$

(b) $a \vee (a \wedge b) \equiv a$

(c) $\neg a \to \bot \equiv a$

Aufgabe 16 ....

Sei A eine endliche Menge. Der Wahrheitswertebereich B_A hat die Form $(2^A, \subseteq, \to_2 A, \neg_2 A)$ mit $\neg B_A(X) = A \backslash X$ und $\to B_A(X, Y) = (A \backslash X) \cup Y$. Zeigen Sie, dass natürliches Schließen für jeden Wahrheitswertebereich B_A korrekt ist. Hinweis: Führen Sie die Korrektheit für Wahrheitswertebereiche der Form B_A auf die Korrektheit für den Boole'schen Wahrheitswertebereich zurück.

Aufgabe 17 ....

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen!

(a) Aus $\Gamma \nVdash_W \phi$ folgt $\Gamma \Vdash_w \neg\phi$ für jeden Wahrheitswertebereich W.

(b) Es gibt eine Menge aussagenlogischer Formeln Γ und eine Formel ϕ mit $\Gamma \vdash \phi$ und $\Gamma \vdash \neg\phi$.

(c) Angenommen, es gäbe eine aussagenlogische Formel ϕ mit $\varnothing \vdash \phi$ und $\varnothing \vdash \neg\phi$. Dann ist jede aussagenlogische Formel ein Theorem.

Aufgabe 18 ....

Der Schnitt zweier B-Belegungen B_1, B_2 sei $B_1 \cap B_2$, wobei $B_1 \cap B_2(pi) = min(B_1(p_i), B_2(p_i))$ für alle atomarenFormeln p_i.

(a) Zeigen Sie, dass Belegungen, die Horn-Formeln erfüllen unter Schnitt abgeschlossen sind, dass also für jede Horn-Formel ϕ und B-Belegungen B_1, B_2 gilt: Wenn $B_1(\phi) = 1$ und $B_2(\phi) = 1$, dann auch $B_1 \cap B_2(\phi) = 1$.

(b) Verwenden Sie Aufgabenteil (a) um zu zeigen, dass $\phi = \neg(p_1 \wedge p_2) \rightarrow (p_3 \vee p_4))$ keine Horn-Formel ist.

Aufgabe 19 ....

Seien x, y, z Variablen, P ein einstelliges Relationssymbol, Q ein zwei-stelliges Relationssymbol, a ein null-stelliges Funktionssymbol und f ein einstelliges Funktionssymbol. Geben Sie die freien Variablen der folgenden Formeln an. Welche der Formeln sind Sätze?

(a) $\forall x : Q(x, x) \rightarrow \exists x : Q(x, y)$

(b) $P(f(x)) \rightarrow \exists x : P(x)$

(c) $P(a) \vee P(f(a))$

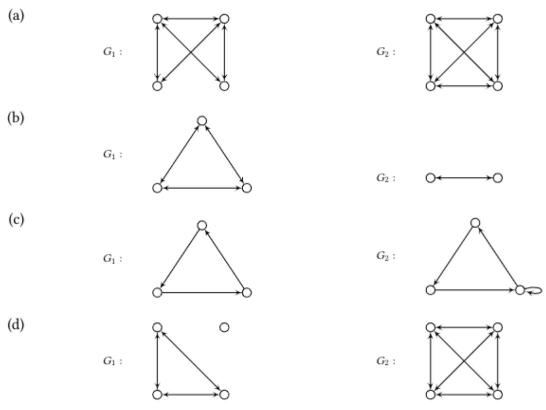
(d) $\exists z : (Q(z, x) \vee Q(y, z)) \rightarrow \exists y : (Q(x, y) \wedge Q(x, z))$

Aufgabe 20 ....

Sei $X = \{x_1, ..., x_n\}$ eine endliche, nicht-leere Menge von Variablen und $\sum'$ eine endliche Signatur mit Relationen $R_1, ..., R_r$, Funktionen $f_1, ..., f_k$ und ar entsprechende Stelligkeitsfunktion. Wir können die Menge $PL(X)$ der prädikatenlogischen $\sum'$-Formeln mit Variablen aus X als eine formale Sprache über dem Alphabet $\sum = \{\bot, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, (,), \exists, \forall, =\} \cup \{,\} \cup X \cup \sum'$ auffassen. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für $PL(X)$ an.

Aufgabe 21 ....

Geben Sie für jedes der folgenden Graphenpaare $G1, G2$ einen prädikatenlogischen Satz an, sodass $G1$ Modell für diese Formel ist, $G2$ aber nicht.



Aufgabe 22 ....

Sei Γ die Signatur bestehend aus einem zwei-stelligen Relationssymbol $\in$. Für eine Menge von Mengen M definieren wir die Struktur S mit $U_S = M$ und $\in^S = \in$. Geben Sie für jede der folgenden Aussagen eine Formel an, die diese beschreibt.

(a) Es gibt eine Menge, die keine Menge enthält.

(b) Für alle Mengen A , B gibt es eine Menge, die genau A und B enthält.

(c) Für jede Menge A gibt es eine Menge B, die genau die Elemente der Elemente der Menge A enthält.

Aufgabe 23

Sei Γ die Signatur bestehend aus einem zwei-stelligen Relationssymbol E. Für einen (gerichteten) Graphen $G = (V, E)$ definieren wir dann die Struktur G mit $V = U_G$ und $E = E^G$. Welche der folgenden Aussagen sind sind wahr? Begründen Sie Ihre Aussage!

(a) $\{\exists x \exists y \exists z : (E(x,y) \wedge E(y,z) \wedge E(z,x))\}$ ist erfüllbar.

(b) $\{\exists x \forall y : E(x,y)\}$ ist erfüllbar, aber nicht allgemeingültig.

(c) $\{\forall x \forall y : (E(x,y) \rightarrow \neg E(y,x))\} \Vdash \forall x \forall y : (E(x,y) \wedge E(y,x) \rightarrow x = y)$

(d) $\{\forall x \forall y : (E(x,y) \vee E(y,x))\} \Vdash \exists x \exists y : (E(x,y) \wedge \neg x = y)$

Aufgabe 24

Vervollständigen Sie die unten aufgeführte Deduktion, indem Sie die verwendeten Regeln angeben und gege-benenfalls temporäre Hypothesen kenntlich machen. Welche syntaktische Folgerung wird durch die Deduktiongezeigt?

Aufgabe 25

Sei $\sum$ eine Signatur mit dem zweistelligen Funktionssymbol f. Zeigen Sie durch Angabe einer geeigneten Deduktion, dass für beliebige $\sum$-Terme s_1, s_2, t_1, t_2 gilt: $\{s_1 = t_1, s_2 = t_2\} \vdash f(s_1, s_2) = f(t_1, t_2)$.

Aufgabe 26

Geben Sie für die folgenden (inkorrekten) Ableitungen je einen fehlerhaften Ableitungsschritt an. Begründen Sie!

(a)
$$\dfrac{\exists x(x = a) \qquad \dfrac{[x = a]^1}{\forall x(x = a)}\,(\forall\text{-I})}{\forall x(x = a)}\,(\exists\text{-E}^1)$$

(b)
$$\dfrac{\dfrac{[\forall y(P(y,y))]^1}{\exists x \forall y(P(x,y))}\,(\exists\text{-I})}{\forall y(P(y,y)) \rightarrow \exists x \forall y(P(x,y))}\,(\rightarrow\text{-I}^1)$$

(c)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x(P(x))]^2 \qquad [P(x)]^1}{P(X)}\,(\exists\text{-E}^2)}{\forall x(P(x))}\,(\forall\text{-I})}{\exists x(P(x)) \rightarrow \forall x(P(x))}\,(\rightarrow\text{-I}^1)$$

Aufgabe 27

Wir betrachten die Formelmenge $\Gamma = \{\exists B \forall C(\neg C \in B), \forall A \forall B \exists C(A \in C \wedge B \in C \wedge \forall D(D \in C \rightarrow C = A \vee C = B))\}$ und die Formel $\varphi = \exists C \exists B \forall A(\neg A \in B \wedge B \in C)$ für die Signatur, die nur das zweistellige Relationssymbol $\in$ enthält. Zeigen Sie, dass $\Gamma \vdash \varphi$ gilt indem Sie eine Deduktion angeben.

Aufgabe 28

Geben Sie zum Beweis des Korrektheitslemmas für das natürliche Schließen in der Prädikatenlogik den Induktionsschritt für den Fall $(\exists - I)$ an.

Aufgabe 29

In dieser Aufgabe betrachten wir Mengen von Schließregeln. Wir sagen, dass eine Menge von R von Schließregeln verifizierbar ist, wenn es entscheidbar ist, ob in einer Deduktion ausschließlich Regeln aus R verwendet wurden. Beispielsweise sei R_{nat} die Menge der Regeln des natürlichen Schließens. In der Vorlesung haben wir bereits gesehen, dass R_{nat} verifizierbar ist.

Begründen Sie jeweils kurz, dass Ihre Regelmenge die entsprechenden Eigenschaften hat. Geben Sie je eine Mengen von Schließregeln an, die

(a) nicht vollständig, aber korrekt und verifizierbar ist.

(b) vollständig, nicht korrekt, aber verifizierbar ist.

(c) vollständig und korrekt, aber nicht verifizierbar ist.

Aufgabe 30 ....

Wir betrachten die folgenden Sachverhalte:

- Vorlesungen werden von genau einem Professor gehalten.
- Studierende können Vorlesungen besuchen.
- Studierende können den Vortragsstil eines Professors mögen.
- Ein Studierender besucht eine Vorlesung genau dann, wenn er den Vortragsstil des Professors mag.
- Jedes Objekt ist entweder ein Studierender, ein Professor oder eine Vorlesung, aber nicht Mehreres davonzugleich.

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben!

(a) Formalisieren Sie die angegebenen Sachverhalte in der Prädikatenlogik. Verwenden Sie dazu einstellige Relationssymbole P(rofessor), S(tudierender), V(orlesung) und zweistellige Relationssymbole H(ält die Vorlesung), M(ag den Vortragsstil), B(esucht die Vorlesung). Formalisieren Sie insbesondere auch zwischen welchen Objekten die Beziehungen H,M und B bestehen können.

(b) Wir sagen, dass zwei Objekte o_1 und o_2 äquivalent sind (in Zeichen $o_1 \sim o_2$), wenn sie gleich sind oder vom gleichen Professor gehalten werden. Weisen Sie nach, dass die resultierende Relation $\sim$ unter den gegebenen Voraussetzungen eine Kongruenz ist.

Aufgabe 31 ....

Sei $\sum$ eine Signatur mit einem zweistelligen Relationssymbol E. Im Folgenden verstehen wir $\sum$-Strukturen G als unter Umständen unendliche, gerichtete Graphen $G = (U_G, E^G)$.

(a) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Formel φ_n an, sodass ψ_n die Klasse der Graphen axiomatisiert, in denen es einen Pfad der Länge n gibt.

(b) Geben Sie eine unendliche Formelmenge ϕ an, sodass $G \Vdash \Psi$ die Klasse der Graphen axiomatisiert, in denen es beliebig lange Pfade gibt.

(c) Zeigen Sie mithilfe des Kompaktheitssatzes der Prädikatenlogik, dass es keinen $\sum$-Satz ψ gibt, der die Klasse der Graphen axiomatisiert, die nicht beliebig lange Pfade besitzen.
Hinweis:Nehmen Sie an, dass es so einen Satz ψ gibt und leiten Sie aus der Unerfüllbarkeit von $\phi \cup \{\psi\}$ mittels Kompaktheitssatz einen Widerspruch her.

Aufgabe 32 ....

Sei f ein einstelliges Funktionssymbol und R ein zweistelliges Relationssymbol. Weiterhin sei

$$\varphi = \neg\exists x(R(x, f(x)) \land \forall y \exists x(R(y, x)))$$

(a) Berechnen Sie eine Formel ψ_1 in Pränexform, die äquivalent ist zu φ.

(b) Berechnen Sie eine Formel ψ_2 in Skolemform, die erfüllbarkeitsäquivalent ist zu φ.

Aufgabe 33 ....

Der Algorithmus zur Berechnung der Skolemform liefert für die Formel $\exists x : P(x)$ das Ergebnis $P(a)$ mit einer neuen Konstanten a. Zeigen Sie, dass diese beiden Formeln nicht äquivalent sind.

Aufgabe 34 ....

Sei $\sum$ die Signatur mit dem zweistelligen Relationssymbol R, der Konstante a und dem zweistelligen Funktionssymbol g. Gegeben sei weiterhin die folgende Formel: $\varphi = \forall x \forall y : (R(x, g(x, y)) \lor R(x, a) \land (\neg R(y, x) \lor R(y, g(x, y))))$. Geben Sie jeweils mindestens zwei Elemente des Herbrand-Universums und der Herbrand-Expansion an.

Aufgabe 35 ....

Sei $\sum$ die Signatur mit dem zweistelligen Relationssymbol R und den Konstanten a und b. Betrachten Sie die folgende Formel $\varphi = \forall x \forall y : (R(a, b) \land (R(x, x) \to R(a, y)) \land \neg R(y, a))$.

(a) Berechnen Sie die Herbrand-Expansion $E(\varphi)$.

(b) Überprüfen Sie, ob $E(\varphi)$ aussagenlogisch erfüllbar ist.

Aufgabe 36 ....

Sei $\sum$ die Signatur mit dem einstelligen Relationssymbol P, der Konstante a und den einstelligen Funktionssymbolen f und g. Betrachten Sie die Formel $\varphi = \forall x : (P(a) \wedge (P(x) \rightarrow P(f(x))) \wedge \neg P(g(x)))$. Weiterhin sei A eine Struktur mit

- $U_A = \mathbb{Q}$,
- $P^A = \mathbb{N} \backslash \{0\}$,
- $a^A = 1$,
- $f^A(n) = n + 1$ für alle $n \in \mathbb{Q}$ und
- $g^A(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Q}$.

Dann kann leicht $A \Vdash \varphi$ gezeigt werden. Konstruieren Sie aus A eine Herbrand-Struktur B, welche ebenfalls Modell für φ ist.