Disclaimer

Die Übungen die hier gezeigt werden stammen aus der Vorlesung *Grundlagen und diskrete Strukturen*! Für die Richtigkeit der Lösungen wird keine Gewähr gegeben.

1. Welche der folgenden Sätze sind logische Aussagen? Geben Sie, falls möglich, den Wahrheitswert mit Begründung an.
   (a) Es gibt unendlich viele Primzahlen.
   (b) Hat die Gleichung $x^3 - x = 0$ zwei reelle Lösungen?
   (c) Dieser Satz besteht aus sechs Wörtern.
   (d) Dieser Satz ist falsch.
   (e) Ein Satz, der das Wort Steuersenkung enthält ist falsch.
   (f) Es gibt einen Gott.
   (g) Wenn Rot gleich Grün ist, dann ist Schwarz gleich Gelb.

2. Bestimmen Sie den Wahrheitswerteverlauf der aussagenlogischen Formel $((p \leftrightarrow q) \wedge q) \rightarrow p$.

3. Untersuchen Sie mit Hilfe aussagenlogischer Formeln, ob sich die folgende Argumentation als Beweis dafür eignet , dass 7 eine Primzahl ist. Aus der Aussage „Wenn 7 kleiner ist als 4, dann ist 7 keine Primzahl." und der Aussage „7 ist nicht kleiner als 4" folgt die Aussage „7 ist eine Primzahl."

4. Welche der folgenden aussagenlogischen Formeln sind Tautologien bzw. Kontradiktionen?
   (a) $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
   (b) $(\neg p \vee (\neg p \wedge q)) \leftrightarrow p$
   (c) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$

5. Beweisen Sie die folgenden logischen Äquivalenzen.
   (a) $p \equiv (p \wedge (p \vee q))$
   (b) $(p \wedge (q \wedge r)) \equiv ((p \wedge q) \wedge r)$
   (c) $(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
   (d) $(\neg(p \wedge q)) \equiv ((\neg p) \vee (\neg q))$

6. Beweisen Sie:
   (a) Jede Aussagenlogische Formel ist äquivalent zu einer aussagenlogischen Formel, in der die konstanten Wahrheitswerte w und f nicht vorkommen.
   (b) Jede Aussagenlogische Formel ist äquivalent zu einer aussagenlogischen Formel, in der weder Implikation noch Äquivalenz vorkommt.

7. Auf einer Insel leben nur Ritter und Schurken. Die Ritter sagen immer die Wahrheit, und die Schurken lügen immer. Wir treffen auf der Insel drei Personen A, B und C. A sagt: „Jeder von uns dreien ist ein Schurke," B sagt: „Genau einer von uns dreien ist ein Ritter." Der Vollständigkeit und guten Ordnung halber sei erwähnt, dass C schweigt. Was sind A, B und C?

8. Geben Sie für die Aussageform $p(x) =$„x ist nicht durch zwei teilbar" Universen U_1, U_2, U_3 und U_4 mit unendlich vielen Elementen so an, dass
   (a) „$\forall x \in U_1 : p(x)$„ wahr ist,
   (b) „$\forall x \in U_2 : p(x)$„ falsch ist,
   (c) „$\exists x \in U_3 : p(x)$„ wahr ist,
   (d) „$\exists x \in U_4 : p(x)$„ falsch ist.

9. Stellen Sie den folgenden mathematischen Sachverhalt als Aussageform dar. „Das arithmetische Mittel verschiedener positiver reeller Zahlen ist größer als deren geometrisches Mittel."

10. Bilden Sie die Negation folgender Aussagen:

(a) Für jedes Töpfchen gibt es ein Deckelchen.
(b) Immer, wenn ich nach Ilmenau komme, regnet es oder die Schranken sind unten.
(c) Für jeden Studierenden gibt es mindestens eine interessante Vorlesung.
(d) Everybody loves somebody sometimes.
(e) Kleine Kinder und Betrunkene sagen immer die Wahrheit.
(f) $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |a_n - g| < \epsilon \qquad (lim_{n\to\infty} a_n = g)$
(g) $\forall S \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : a_n > S \qquad (lim_{n\to\infty} a_n = +\infty)$

11. Welche der folgenden Äquivalenzen gelten für jedes Universum und beliebige Prädikate P, Q?
    (a) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$
    (b) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$
    (c) $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x P(x)) \exists (\forall x Q(x))$
    (d) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\exists x P(x)) \exists (\forall x Q(x))$
    (e) $\forall x \exists y \forall z (P(x,y) \wedge Q(z)) \equiv \forall x \forall z \exists y (P(x,y) \wedge Q(z))$

12. Gegeben sind die Mengen $A = \{n | (n \in N) \wedge (3 \text{ teilt n})\}$, $B = \{n | (n \in N) \wedge (2 \text{ teilt n})\}$ und $C = \{n | (n \in N) \wedge (6 \text{ teilt n})\}$. Geben Sie für die folgenden Mengen eine möglichst einfache Beschreibung mit Hilfe definierender Eigenschaften.
    (a) $A \cup B$
    (b) $A \cap B$
    (c) $C \backslash A$
    (d) $A \backslash C$

13. Beweisen Sie die Gültigkeit der folgenden Distributivgesetze für beliebig gegebene Mengen A, B, C.
    (a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
    (b) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

14. Es seien A und B Mengen. Beweisen Sie: Wenn zwei der folgenden drei Aussagen wahr sind, dann gilt auch die dritte.
    (a) $A \backslash B = \varnothing$.
    (b) $A \subseteq B$.
    (c) $A = \varnothing$.

15. Beweisen Sie die folgenden Aussagen für beliebig gegebene Mengen A, B, C.
    (a) $(A \subseteq C \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \cup B \subseteq C$
    (b) $(A \subseteq B \wedge A \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq B \cup C$

16. Man stelle die folgenden Mengen so einfach wie möglich dar:
    (a) $A \backslash (B \backslash A)$
    (b) $B \backslash (A \backslash B)$
    (c) $(A \cup B) \backslash (A \backslash B)$

17. Geben Sie für $i \in \{1, 2, 3\}$ Mengen M_i und N_i minimaler Kardinalität mit $A_i \subseteq M_i \times N_i$ an.
    (a) $A_1 = \{(a, \alpha), (4, 3), (,)\}$.
    (b) $A_2 = \{(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z} | m = 2n\}$.
    (c) $A_3 = \{(C, D) \in \mathcal{P}(\{2, 3\}) \times \mathcal{P}(\{1, 3, 4\}) | C \cup D = \{1, 2, 3, 4\}\}$.

18. Es seien A, B, C, D Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie
    (a) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
    (b) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$

19. Beweisen Sie die folgende Behauptung durch vollständige Induktion: Für jede Menge M und jedes $n \in N$ gilt: $|M| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(M)| = 2^n$.

20. Es sei $R = \{(e,b),(e,a),(b,c),(c,e),(d,e)\}$ eine Relation auf $A = \{a,b,c,d,e\}$. Bestimmen Sie Relationen R_1, R_2 und R_3 auf A mit minimaler Kardinalität derart, dass gilt:
    (a) $R \subseteq R_1$ und R_1 ist transitiv
    (b) $R \subseteq R_2$ und R_2 ist reflexiv und transitiv
    (c) $R \subseteq R_3$ und R_3 ist reflexiv, transitiv und symmetrisch.

21. Ist C eine Partition einer Menge A, so sei $\sim_C$ die Relation mit $x \sim_C y \Leftrightarrow \exists D \in C : x, y \in D$.
    (a) Man zeige, dass $\sim_C$ eine Äquivalenzrelation auf A ist.
    (b) Man zeige $C \backslash \sim_C = C$.
    (c) Man zeige Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A so ist $\sim = \sim_{C\backslash\sim}$

22. Es sei F die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ mit $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$. Für $f \in F$ ist $O(f)$ bekanntlich definiert durch $O(f) = \{g \in F | \exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c * f(n)\}$. Untersuchen Sie die Relation $R = \{(f,g) | f = O(g)\} \subseteq F^2$ auf Reflexivität, Transitivität, Symmetrie und Antisymmetrie. Begründen Sie Ihre Aussagen. Ist R eine Halbordnungsrelation?

23. Man zeige, dass der Durchschnitt zweier transitiver Relationen transitiv ist.

24. Es sei $R \subseteq A \times A$ eine Halbordnungsrelation auf einer nicht-leeren Menge A. Für $a \in A$ sei $M(a) = \{x \in A | (x,a) \in R\}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind:
    (a) $\forall a, b \in A : M(a) = M(b) \Rightarrow a = b$.
    (b) $\forall a, b \in A : (a,b) \in R \Leftrightarrow M(a) \subseteq M(b)$.

25. Prüfen Sie, ob die folgende Relation R eine Äquivalenzrelation, eine Halbordnungsrelation bzw. eine Ordnungsrelation ist.
$$R = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 | \text{a teilt c und b teilt d}\}$$

26. Es seien A und B Mengen mit Halbordnungsrelationen $\leq_A$ auf A und $\leq_B$ auf B. Auf der Menge $A \times B$ von A sei eine Relation R definiert durch $R = \{((a_1,b_1),(a_2,b_2)) \in (A \times B)^2 | a_1 \leq_A a_2 \wedge b_1 \leq_B b_2\}$. Zeigen Sie, dass R eine Halbordnungsrelation ist.

27. Geben Sie für $i \in \{1,2,3,4,5\}$ jeweils eine maximale Kette für die Halbordnungsrelation R_i an und finden Sie, falls möglich, Supremum und Infimum der Menge M_i bezüglich R_i.
    (a) $R_1 = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$ und $M_1 = \{x \in \mathbb{N} | 0 \leq x \leq \frac{17}{3}\}$
    (b) $R_2 = \{(A,B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^2 | A \subseteq B$ und $M_2 = \mathcal{P}(\mathbb{N})$
    (c) $R_3 = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | \text{a teilt b}\}$ und $M_3 = \mathbb{N}$
    (d) $R_4 = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | \text{a teilt b}\}$ und $M_4 = \{n \in \mathbb{N} | \text{n ist eine Primzahl}\}$
    (e) $R_5 = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | \text{a teilt b}\}$ und $M_5 = \{n \in \mathbb{N} | (\text{n ist eine Primzahl}) \wedge (n \leq 47)\}$

28. Auf einer Menge A sei eine Quasiordnung $\leq_Q$ gegeben. Wir definieren eine Relation $\sim$ auf A durch $x \sim y \Leftrightarrow x \leq_Q y \wedge y \leq_Q x$.
    (a) Man Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A ist.
    (b) Auf $A \backslash \sim$ wird eine Relation $\leq_H$ definiert durch $[a]_\sim \leq [b]_\sim \Leftrightarrow a \leq_Q b$. Man begründe, dass $\leq_H$ wohldefiniert ist und zeige, dass es sich dabei um eine Halbordnung handelt.
    (c) Sei $\leq_Q$ die aus der O-Notation resultierende Quasiordnung. Man gebe die Äquivalenzklassen $[f]_\sim$ an. Wann gilt $[f]_\sim \leq_H [g]_\sim$. Ist $\leq_H$ eine Totalordnung?

29. Für zwei Mengen A und B und eine binäre Relation $f \subseteq A \times B$. Prüfen Sie jeweils, ob $f : A \to B$ eine Abbildung ist.
    (a) $A = \{a,b\}, B = \{1,2,3\}$ und $f = \{(a,1),(b,2)\}$
    (b) $A = B = R$ und $f = \{(x,y) \in A \times B | x * y = 0\}$

(c) $A = N, B = R$ und $f = \{(x,y) \in A \times B | y = \sqrt{x}\}$

(d) $A = R, B = N$ und $f = \{(x,y) \in A \times B | y = \sqrt{x}\}$

30. Es seien $f, g : A \to B$ zwei Funktionen. Man beweise:

$$f = g \Leftrightarrow \forall x \in A : f(x) = g(x)$$

.

31. Es sei $f : A \to B$ eine Abbildung mit dem Definitionsbereich A und dem Wertebereich B. Weiterhin seinen A_1, A_2 Teilmengen von A und B_1, B_2 Teilmengen von B. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.
   (a) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.
   (b) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

32. Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen und überprüfen Sie jeweils, ob die Umkehrungen der Aussagen gelten.
   (a) Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.
   (b) Sind f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.
   (c) Sind f und g bijektiv, so ist auch $g \circ f$ bijektiv.

33. Eine Menge A heißt endlich falls A leer ist oder es gibt eine natürliche Zahl n mit $A \approx \{1, ..., n\}$ (Schreibweise $|A| = n$). Andernfalls heißt A unendlich. A heißt abzählbar, falls A gleichmächtig zu einer Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist. Andernfalls heißt A überabzählbar. Man beweise folgende Aussagen:
   (a) Jede endliche Menge ist abzählbar.
   (b) Jede abzählbar unendliche Menge ist gleichmächtig zu $\mathbb{N}$.
   (c) Für jede Menge A gilt $A \preceq \mathcal{P}(A)$ und $A \not\approx \mathcal{P}(A)$ (Satz von Cantor)
   (d) $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

34. Es sei $(G, *)$ eine Gruppe mit neutralem Element e_G. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.
   (a) Für alle $a, b \in G$ gilt $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^*$.
   (b) $(G, *)$ ist abelsch, wenn $a * a = e_G$ für alle $a \in G$.

35. Sei X eine Menge und $S(X) = \{f : X \to X | \text{f ist bijektiv}\}$ die Menge der bijektiven Abbildungen von X. Weiterhin sein $\circ$ die Operation auf $S(X)$ mit $h = f \circ g \Leftrightarrow \forall x \in X : h(x) = f(g(x))$. Man zeige, dass $(S(X), \circ)$ eine Gruppe ist. Ist die Gruppe kommutativ? ($S(X)$ heißt symmetrische Gruppe von X, die Operation $\circ$ heißt Komposition.)

36. Ein Pfeil in der Ebene sei ein Tupel $((s_x, s_y), (z_x, z_y))$ aus Punkten der Ebene. Der Punkt $(s_x, s_y) \in \mathbb{R}^2$ ist dabei der Startpunkt und $(z_x, z_y) \in \mathbb{R}^2$ der Zielpunkt (die Spitze) des Pfeils. Sei $M = \{(s_x, s_y), (z_x, z_y) | z_x, z_y, s_x, s_y \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller Pfeile der Ebene. Auf M ist eine Relation $\sim$ erklärt durch $((a,b),(c,d)) \sim ((e,f),(g,h)) \Leftrightarrow (c - a = g - e \wedge d - b = h - f)$
   (a) Man zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
   (b) Auf der Menge $G = M \backslash \sim$ wird eine Operation $\oplus$ erklärt durch $[(a,b),(c,d)] \sim \oplus [(e,f),(g,h)]_\sim = [((a+e, b+f),(c+g, d+h))]_\sim$ Man begründe dass $\oplus$ wohldefiniert ist und zeige, dass $(G, \oplus)$ eine abelsche (d.h. kommutative) Gruppe ist.
   (c) Man Zeige, dass jede Äquivalenzklasse einen Vertreter der Form $((0,0),(x,y))$ hat. $\binom{x}{y} := [(0,0),(x,y)]_\sim$. Man nennt die Äquivalenzklasse auch Spaltenvektor.

37. Es sei $\mathbb{R}^2$ die Menge der dreidimensionalen Spaltenvektoren. Welche der folgenden Paare bilden jeweils eine Gruppe.
   (a) $(\mathbb{R}^2, \oplus), \oplus$ ist komponentenweise Addition
   (b) $(\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, \odot), \odot$ ist komponentenweise Multiplikation.
   (c) $(\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, \otimes)$ mit $\binom{a}{b} \otimes \binom{c}{d} = \binom{ac-bd}{ad+bc}$
   (d) Man zeige, dass $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ ein Ring aber kein Körper ist.

(e) Man zeige, dass $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ ein Körper ist.

38. (a) Man bestimme die Menge M der invertierbaren Elemente von $\mathbb{Z}_{10}$
    (b) Man beweise: $\bar{a}$ ist genau dann invertierbar in $\mathbb{Z}_m$, wenn a und m teilerfremd sind.

39. Es sei p eine Primzahl. Man beweise folgende Aussagen:
    (a) $ab \equiv ac(mod\ p) \Leftrightarrow b \equiv c(mod\ p)$ (Hinweis: Lemma von Euklid)
    (b) Für jedes $a \in \mathbb{N}$ mit $p \not| a$ lassen die Zahlen $1a, 2a, 3a, ..., (p-1)a$ alle verschiedene Reste bei Division durch p.
    (c) Für jedes $a \in \mathbb{N}$ mit $p - a$ gilt $a^{p-1} \equiv 1(mod)$ (kleiner Satz von Fermat). (Hinweis: Man betrachte das Produkt der Zahlen aus Aufgabe b)

40. Berechnen Sie $(430772581411 * 2391233625 + 22222136 * 555503 - 18522)\ mod\ m$ für jedes $m \in \{1, 2, 5, 100\}$.

41. Man beweise die folgenden Teilbarkeitsregeln:
    (a) Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 3 bzw. 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 bzw 9 teilbar ist.
    (b) Eine natürliche Zahl a mit der Darstellung $a = \sum_{i=0}^{n} a_i * 10^i$ im Dezimalsystem ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme $\sum_{i=0}^{i}(-1)^i * a_i$ durch 11 teilbar ist.

42. Berechnen Sie
    (a) $(1546984316385^7)^3\ mod\ 11$
    (b) $12^31\ mod\ 7$
    (c) $13^43\ mod\ 47$

43. Es seien a und b natürliche Zahlen. Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b sind bekanntlich definiert als $ggt(a, b) = max\{k \in \mathbb{N}|\text{k}|\text{a und k}|\text{b}\}$ und $kgv(a, b) = min\{k \in \mathbb{N}|\text{a}|\text{k und b}|\text{k}\}$.
    (a) Beschreiben Sie, wie man aus der Primfaktorzerlegung der Zahlen a und b ihren größten gemeinsamen Teiler und ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches ablesen kann. Dabei sei $1 = 1$ als Primfaktorzerlegung der Zahl 1 vereinbart.
    (b) Zeigen Sie, dass $a \cdot b = ggt(a, b) \cdot kgv(a, b)$ gilt.

44. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{Z}_n^* = \{x \in \mathbb{Z}_n \backslash \{\bar{0}\} | ggt(x, n) = 1\}$. Beweisen Sie, dass $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$ eine Gruppe ist.

45. Sei $(G, *)$ eine Gruppe und U eine Teilmenge von G. U heißt Untergruppe von $(G, *)$ falls $(U, *)$ eine Gruppe ist, wobei $*$ die Einschränkung der Operation auf U ist. Man Zeige dass U genau dann eine Untergruppe von $(G, *)$ ist, wenn folgende Eigenschaften gelten:
    - $e_G \in U$
    - $a, b \in U \Rightarrow a * b \in U$
    - $a \in U \Rightarrow a^{-1} \in U$

46. Wir betrachten den Booleschen Verband der Äquivalenzklassen logischer Ausdrücke: Man zeige dass die Operationen $\wedge, \vee, ^-$ wohldefiniert sind.

47. Gegeben sei die Menge $M_n = \{0, 1\}^n = \{a = (a_1, ..., a_n) | a_i \in \{0, 1\}\}$ der n-Tupel von 0en und 1en. Auf $\{0, 1\}$ werden Operationen $+$ und $\cdot$ erklärt durch
    - $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1 + 0 = 1 + 1 = 1$
    - $1 \cdot 1 = 1, 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$

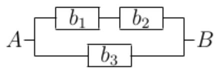
    Weiterhin seien auf M_n die Operationen $\wedge, \vee, ^-$ mit
    - $(a \vee b)_i = a_i + b_i$
    - $(a \wedge b)_i = a_i \cdot b_i$

- $(\bar{a})_i = 1 \Leftrightarrow a_i = 0$

gegeben. Man zeige, dass $(M_n, \wedge, \vee, \bar{\ })$ eine Boolesche Algebra ist.

48. Bei einem Wurf mit zwei fairen Würfeln seien A das Ereignis, dass die Summe der Augen ungerade ist, und B das Ereignis, dass mindestens ein Wurf die Augenzahl eins oder zwei ergibt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $A, B, A \cap B, A \cup B$ und $A \cap \bar{B}$.

49. Es seien b_1, b_2 und b_3 elektronische Bauteile, die mit den Wahrscheinlichkeiten $0.05, 0.08$ und 0.1 unabhängig voneinander durch Stromunterbrechung ausfallen.



   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Stromfluss in gegebenen Schaltung von A nach B unterbrochen?

   (b) Um wieviele Bauteile der Sorte b_3 ist die in a) gezeigte Schaltung durch Parallelschaltung mindestens zu erweitern, damit die Ausfallwahrscheinlichkeit noch höchstens 0.0002 beträgt?

50. Drei Personen besteigen in der Tiefgarage eines Gebäudes den Fahrstuhl und verlassen diesen unabhängig voneinander und jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit in einem der folgenden 10 Etagen. Es bezeichne X die Anzahl der Fahrstuhlhalts, den die drei Fahrgäste benötigen. Berechnen Sie $P[X = k]$ für $1 \leq k \leq 10$ und $E[X]$.

51. Zwei Unternehmen sind zu 60% bzw. zu 40% an der Gesamtproduktion eines elektronischen Bauteils beteiligt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil mindestens 2000 Stunden betriebsfähig bleibt, ist für das erste Unternehmen 0.8 und für das zweite Unternehmen 0.7.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt ein der Gesamtproduktion entnommenes Bauteil mindestens 2000 Stunden lang betriebsfähig?

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebig ausgewähltes Bauteil, das bereits nach 1200 Stunden ausfiel, aus dem zweiten Unternehmen stammt?

52. In einer Spielshow stellt der Moderator den Kandidaten vor die Entscheidung, eines von drei Toren zu wählen. Hinter einem verbrirgt sich der Hauptpreis, hinter den zwei anderen der Zonk (eine Niete). Der Kandidat wählt eines der Tore. Daraufhin öffnet der Moderator eines der beiden anderen Tore hinter dem sich ein Zonk befindet und lässt dem Kandidaten die Wahl, das gewählte Tor zu behalten oder das verbleibende zu wählen. Sollte der Kandidat wechseln?

53. An der Technischen Universität Hintertupfingen studieren 10% aller Studierenden Informatik, 15% Angewandte Medienwissenschaften, 20% beginnen ein Wirtschafts- und 55% ein Ingenieurstudium. Im Wintersemester 2011/12 lag bei der Mathematik I Prüfung die Durchfallquote bei 50% bei den Informatikern 35% bei den Ingenieuren 30% bei den Wirtschaftlern und bei den angewandten Medienwissenschaftlern bei 60%. Im April läuft ein glücklich aussehender Student über den Campus, der gerade seine Mathe I Klausur bestanden hat. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er Informatiker ist?

54. Anna ist Informatikstudentin und besucht etwa jede 2. Woche ihre Lieblingsdiskothek. Diese hat 3 Räume, von denen Anna jeden gleich häufig besucht. Ihr Kommilitone Bastian besucht eines Samstags die Disko. Er trifft Anna in den ersten beiden Räumen nicht an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Anna sich im dritten Raum befindet?

55. Bastian findet Anna nicht in der Disko, dafür aber zwei flüchtige Bekanntschaften namens Dorothea und Eleonore, die er gerne näher kennenlernen würde. Er schätzt die Chancen dazu bei Dorothea auf 70% und bei Eleonore auf 50%. Bei einem Misserfolg könnte er sein Glück noch bei der jeweils anderen versuchen. Dann hätte er nur noch eine 10%ige Aussicht auf Erfolg, falls sein erster Versuch aufgefallen ist. Eleonore würde das sofort bemerken, Dorothea nur zu 50%, da sie gerade etwas abgelenkt ist. In welcher Reihenfolge sollte Bastian die Damen ansprechen?

56. Ein Postbote soll ein Paket bei einem Empfänger abgeben. Trifft er diesen nicht an, wird der Postbote noch 3 weitere Zustellversuche machen ehe das Paket an den Absender zurückgeschickt wird. Die Ereignisse, den Empfänger an einem bestimmten Tag anzutreffen seien dabei unabhängig und haben die Wahrscheinlichkeit $p = 0,3$.
    (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht das Paket den Empfänger?
    (b) Für die Zufallsgröße X der Anzahl der Zustellversuche gebe man Erwartungswert und Varianz an.

57. Ein Student mit Stochastik-Tick beschließt ein Jahr lang seine Samstagabendbeschäftigung dem Zufall zu überlassen. Er würfelt jeden Freitag einmal mit einem Würfel und entscheidet dann wie folgt: Er geht zum Tanz, falls die Augenzahl nicht größer als 4 ist, bei einer 5 liest er ein Buch und bei einer 6 geht er ins Kino. Nun sei das Jahr in 13 Perioden a 4 Wochen eingeteilt. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Student in einer solchen Periode (z.B. der ersten):
    (a) mindestens einmal ein Buch liest,
    (b) 2 mal ins Kino geht,
    (c) 4 mal tanzen geht,
    (d) nie tanzen geht,
    (e) alle drei Beschäftigungen wenigstens einmal auftreten.
    (f) Außerdem bestimme man die zu erwartende Anzahl von Perioden, in denen er min- destens 3mal tanzen geht.

58. Beim Biathlon darf beim Schießen bei 5 Schüssen höchstens 2 mal nachgeladen werden, wenn nicht getroffen wurde. Ansonsten müssen Strafrunden gelaufen werden. Es bezeichne X die Anzahl der abgegebenen Schüsse und Y die Anzahl der Strafrunden. Berechnen Sie für beide Zufallsgrößen den Erwartungswert und die Varianz, wenn die Trefferwahrscheinlichkeit 80 Prozent beträgt.

59. 5 Personen fahren gemeinsam mit einem Auto von der Disko nach Hause. 2 von ihnen haben in der Diskothek Drogen konsumiert. Das Auto wird von der Polizei angehalten und zwei der Insassen werden zufällig zu einem Drogentest ausgewählt.
    (a) Für die Zufallsgröße X der positiv getesteten Personen bestimme man die Einzelwahrscheinlichkeiten sowie Erwartungswert und Varianz.
    (b) Der Test sei nun nicht ganz sicher sondern schlägt nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% an. (0% falls keine genommen wurden). Y sei dann die Zufallsgröße der positiv getesteten Personen. Bestimmen Sie wieder Einzelwahrscheinlichkeiten, Erwartungswert und Varianz.
    (c) 100 der 1000 Besucher der Diskothek haben Drogen genommen. Die Polizei testet 20 Personen. Man bestimme näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 3 von ihnen positiv getestet werden.

60. Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Der graphentheoretische Abstand $d(x, y)$ der Ecken x und y ist die Länge eines kürzesten $x-y$-Weges. Man zeige, dass die Abbildung $d : V^2 \to \mathbb{N}$ eine Metrik ist, d.h. für alle $x, y, z \in V$ gilt:
    - $d(x, y) \geq 0$ und es gilt: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (positive Definitheit)
    - $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
    - $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

61. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Man beweise, dass G genau dann nicht zusammenhängend ist, wenn es eine Partition $\{X, Y\}$ der Eckenmenge V gibt, so dass keine Kante $xy \in E$ mit $x \in X$ und $y \in Y$ existiert.

62. Man beweise folgende Aussagen
    (a) In jedem Graphen ist die Anzahl der Ecken ungeraden Grades gerade.
    (b) Jeder Baum mit mindestens 2 Ecken hat eine Ecke vom Grad 1.
    (c) Jeder Baum T hat genau $|V(T)| - 1$ Kanten.

(d) Jeder Baum mit mindestens 2 Ecken hat mindesten 2 Ecken vom Grad 1.

63. Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Man zeige, dass je zwei längste Wege eine Ecke gemeinsam haben.

64. Entscheiden Sie, ob es zu den angegebenen Knotengradfolgen einen Graphen gibt.

    (a) $1, 2, 3, 3, 4$

    (b) $1, 2, 2, 2, 3, 6$

    (c) $2, 2, 3, 3, 4$

65. Beweisen Sie, dass in einem Graphen G, der verschieden vom Nullgraphen ist und dessen Knoten alle einen geraden Grad haben, die folgenden Aussagen gelten.

    - G enthält einen Kreis.
    - Es gibt eine Partition der Kantenmenge $E(G)$, deren Partitionsmengen gerade die Kantenmengen von Kreisen in G sind.

66. Zeigen Sie, dass jeder Graph mit $2n$ Ecken, der keinen Kreis der Länge 3 enthält, höchstens n^2 Kanten hat. (Hinweis: Induktion über n)

67.