Aussagen

Aussagen sind Sätze die wahr oder falsch sind.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
f	f	f	f	w	w	w
f	w	f	w	w	w	f
w	f	f	w	f	f	f
w	w	w	w	f	w	w

Tautologie Wahrheitswerteverlauf konstant w

Kontradiktion Wahrheitswerteverlauf konstant f

Äquivalenz wenn $p \leftrightarrow$ Tautologie ist. $p \equiv q$

Disjunkt Zwei Mengen $X \cap Y = \emptyset$

Atom die bzgl $\leq$ minimalen Elemente von $B/\perp$

Mengen

"Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens" Cantor Von jedem Objekt steht fest, ob es zur Menge gehört oder nicht.

Wunsch 0

$x \in A : \neg(x = x) = \emptyset$ die leere Menge

Wunsch 1

"$x \in y$" x ein Element von y oder nicht.

Wunsch 2

$B = x \in A : p(x) wahr$ B aus wahren p(x) aus A

Wunsch 3

$x = y :\leftrightarrow \forall z : (z \in x \leftrightarrow z \in y)$.

Wunsch 4

$y :\leftrightarrow \forall z : (z \in x \rightarrow z \in y)[x \subseteq y]$

Teilmengen

A Teilmenge von B
$\leftrightarrow \forall x : (x \in A \rightarrow x \in B) :\Rightarrow A \subseteq B$ A Obermenge von B
$\leftrightarrow \forall x : (x \in B \rightarrow x \in A) :\Rightarrow A \supseteq B$ Folglich
$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ Schnittmenge von A und B:
$A \cap B = x : x \in A \wedge x \in B$ Vereinigungsmenge von A und B:
$A \cup B = x : x \in A \vee x \in B$ Seien A,B Mengen, dann sei
$A/B := x \in A : x \notin B = A \triangle B$

Relationen

Eine Relation von Mengen A nach B ist eine Teilmenge R von AxB. $(x, y) \in R$: x steht in einer Relation R zu y; auch xRy

binäre Relation

- Allrelation $R := AxA \subseteq AxA$
- Nullrelation $R := \emptyset \subseteq AxA$
- Gleichheitsrelation $R := (x, y)...x = y$
- $A = R; R := ((x, y) \in \mathbb{R}x\mathbb{R}, x \leq y)$
- $A = \mathbb{Z}; R := \{(x, y) \in \mathbb{Z}x\mathbb{Z}$: x ist Teiler von y$\}$ kurz: x—y

Eigenschaften von Relationen

Sei $R \in AxA$ binäre Relation auf A

- Reflexiv $\leftrightarrow$ xRx $\forall x \in A$
- symmetrisch $\leftrightarrow$ xRy $\rightarrow$ yRx
- Antisymmetrisch $\leftrightarrow$ xRy $\wedge yRx \rightarrow x = y$
- Transitiv $\leftrightarrow$ xRy $\wedge$ yRz $\rightarrow$ xRz
- totale Relation $\leftrightarrow$ xRy $\vee$ yRx $\forall x, y \in A$

R heißt:

- Äquivalenzrelation $\leftrightarrow$ R reflexiv, symmetrisch und transitiv
- Ordnung $\leftrightarrow$ R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv
- Totalordnung $\leftrightarrow$ R Ordnung und total
- Quasiordnung $\leftrightarrow$ R reflexiv und transitiv

Äqivalenzrelation $\sim$

Sei $C\wp(A)$. C heißt Partition/Klasse von A, falls gilt:

- $\bigcup C = A$ d.h. jedes $x \in A$ liegt in (min) einem $y \in C$
- $\emptyset \notin C$ d.h. jedes $y \in C$ enthält (min) ein Element von A
- $x \cap y = \emptyset$ f.a. $x \notin y$ aus C

Ein Graph $G = (V, E)$ ist ein Paar bestehend aus einer Menge V und $E \subseteq (x, y : x \neq y$ aus V). Zu $a, b \in V$ heißt eine Folge $P = x_1, .., x_n$ von paarweise verschiedenen Ebenen mit $a = x_0, b = x_j; x_{j-1}, x_i \in Ea * i \in b * j$ ein a,b-Weg der Länge l oder Weg a nach b. Durch $a \sim b$ gibt es einen a,b-Weg in G, wird eine Äquivalenzrelation auf V definiert, denn:

- "$\sim$ reflexiv": es ist $x \sim x$, denn $P = x$ ist ein x,x-Weg in G
- "$\sim$ symmetrisch": aus $x \sim y$ folgt, es gibt einen x,y-Weg $\rightarrow$ es gibt einen y,x-Weg $y \sim x$
- "$\sim$ transitiv": aus $x \sim y$ und $y \sim x$ folgt, es gibt einen x,y-Weg und einen y,x-Weg

(Halb) Ordnungen

Sei leq eine Ordnung auf X. Sei $A \subseteq X, b \in X$

- b minimal in A $\leftrightarrow b \in A$ und $(c \leq b \rightarrow c = bf.a.c \in A)$
- b maximal in A $\leftrightarrow b \in A$ und $(b \leq c \rightarrow b = cf.a.c \in A)$
- b kleinstes Element in A $\leftrightarrow b \in A$ und $(b \leq cf.a.c \in A)$
- b größtes Element in A $\leftrightarrow b \in A$ und $(c \leq bf.a.c \in A)$
- b untere Schranke von A $\leftrightarrow b \leq cf.a.c \in A$
- b obere Schranke von A $\leftrightarrow c \leq bf.a.c \in A$
- b kleinste obere Schranke von A $\leftrightarrow$ b ist kleinstes Element von $(b' \in X :$ b' obere Schranke von A) auch Supremum von A: $\vee A = b$
- b größte untere Schranke von A $\leftrightarrow$ b ist das größte Element von $(b' \in X :$ b' untere Schranke von A) auch Infinum von A; $\wedge A = b$

kleinstes und größtes Element sind jew. eindeutig bestimmt (falls existent)

Wohlordnungssatz

Jede Menge lässt sich durch eine Ordnung so ordnen, dass jede nichtleere Teilmenge von X darin ein kleinstes Element ist.

Induktion

Menge M heißt induktiv $:\leftrightarrow \emptyset \in M \wedge \forall X \in M, \{X^+ \in M\}$. Ist O eine Menge von induktiven Mengen, $O \pm O$ dann ist auch $\bigcap O$ induktiv. Insbesondere ist der Durchschnitt zweier induktiver Mengen induktiv.

Induktion I

Sei $p(n) \in \mathbb{N}$. Gelte $p(0)$ und $p(n) \rightarrow p(n^+)$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ dann ist $p(n)$ wahr f.a. $n \in \mathbb{N}$.

Induktion II

Sei $p(n) \in \mathbb{N}$, gelte $\{\forall x < n : p(x)\} \rightarrow p(n)$ f.a. $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $p(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Funktionen

Eine Relation $f \subseteq AxB$ heißt Funktion $f : A \rightarrow B$ ("A nach B") falls es zu jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ mit $(x, y) \in f$ gibt. Satz: $f : A \rightarrow B, g : A \rightarrow B$, dann gilt $f = g \leftrightarrow f(x) = g(x)$. Sei $f : A \rightarrow B$ Funktion, f heißt:

- injektiv $\leftrightarrow$ jedes y aus B hat höchstens ein Urbild $(f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$
- subjektiv $\leftrightarrow$ jedes y aus B hat wenigstens ein Urbild $f(x) = y$
- bijektiv $\leftrightarrow$ jedes y aus B hat genau ein Urbild; injektiv und surjektiv

Ist $f : A \rightarrow B$ bijektiv, dann ist auch $f^{-1} \subseteq BxA$ bijektiv, die Umkehrfunktion von f. Mit $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, wird durch $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ eine Funktion $g \circ f : A \rightarrow C$ definiert.

Satz: ist $f : A \rightarrow B$ bijektiv, so ist f^{-1} eine Funktion B nach A. Mengen A,B, heißen gleichmächtig $(|A| = |B| \equiv A \cong B)$ falls Bijektion von A nach B. Eine Menge A heißt endlich, wenn sie gleichmächtig zu einer natürlichen Zahl ist; sonst heißt A unendlich. Eine Menge A heißt Deckend-unendlich, falls es eine Injektion $f : A \rightarrow B$ gibt die nicht surjektiv ist. A heißt höchstens so mächtig wie B, falls es eine Injektion von A nach B gibt: $|A| \leq |B|$ bzw $A \preceq B$ (Quasiordnung).

Für zwei Mengen A,B gilt $|A| \leq |B|$ oder $|B| \leq |A|$. Eine Relation f heißt partielle Bijektion (oder Matching), falls es Teilmengen $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$ gibt sodass f eine Bijektion von A' nach B' gibt.

Kontinuitätshypothese

Aus $|\mathbb{N}| \leq |A| \leq |\mathbb{R}|$ folgt $|A| = |\mathbb{N}|$ oder $|A| = |\mathbb{R}|$ (keine Zwischengrößen).

Gruppen, Ringe, Körper

Eine Operation auf eine Menge A ist eine Funktion $f : AxA \to A$; schreibweise xfy. Eine Menge G mit einer Operation $\circ$ auf G heißt Gruppe, falls gilt:

- $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ freie Auswertungsfolge
- es gibt ein neutrales Element $e \in G$ mit $a \circ e = a$ und $e \circ a = a$ f.a. $a \in G$
- $\forall a \in G \exists b \in G : \{a \circ b = e\} \vee \{b \circ a = e\}; b = a^{-1}$

kommutativ/abelsch, falls neben 1.,2. und 3. außerdem gilt:

- $a \circ b = b \circ a$ f.a. $a, b \in G$

Eine Bijektion von X nach X heißt Permutation von X. $(S_X, \circ)$ ist eine Gruppe.
Zwei Gruppen $(G, \circ_G)$ und $(H, \circ_H)$ heißen isomorph, falls es einen Isomorphismus $(G, \circ_G) \cong (H, \circ_H)$ von $(G, \circ_G)$ nach $(H, \circ_H)$ gibt.

Addition von $\mathbb{N}$

$+ : \mathbb{N}x\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wird definiert durch:

- $m + 0 := m$ f.a. $m \in \mathbb{N}$ (0 ist neutral)
- $m + n$ sei schon definiert f.a. $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$
- $m + n^+ := (m + n)^+$ f.a. $m, n \in \mathbb{N}$

Multiplikation

$* : \mathbb{N}x\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wird definiert durch:

- $m * 0 := 0$ f.a. $m \in \mathbb{N}$
- $m * n^+ = m * n + m$ f.a. $n \in \mathbb{N}$

ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

Durch $(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow a + d = b + c$ wird eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ definiert. Die Äquivalenzklassen bzgl $\sim$ heißen ganze Zahlen (Bezeichnung $\mathbb{Z}$. Wir definieren Operationen +, * auf $\mathbb{Z}$ durch:

- $[(a, b)]_{/\sim} + [(c, d)]_{/\sim} = [(a + c, b + d)]_{/\sim}$
- $[(a, b)]_{/\sim} * [(c, d)]_{/\sim} = [(ac + bd, ad + bc)]_{/\sim}$

Satz: $\mathbb{Z}$ ist eine abelsche Gruppe (+ assoziativ, enthält neutrales Element, additiv Invers).
Ein Ring R ist eine Menge mit zwei Operationen $+, * : \mathbb{R}x\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit:

- $a + (b + c) = (a + b) + c$ f.a. $a, b, c \in \mathbb{R}$
- Es gibt ein neutrales Element $O \in \mathbb{R}$ mit $O + a = a + O = O$ f.a. $a \in \mathbb{R}$
- zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein $-a \in \mathbb{R}$ mit $a + (-a) = -a + a = 0$
- $a + b = b + a$ f.a. $a, b \in \mathbb{R}$
- $a * (b * c) = (a * b) * c)$ f.a. $a, b, c \in \mathbb{R}$
- $a * (b + c) = a * b + a * c$ f.a. $a, b, c \in \mathbb{R}$

R heißt Ring mit 1, falls:

- es gibt ein $1 \in \mathbb{R}$ mit $a * 1 = 1 * a = a$ f.a. $a \in \mathbb{R}$

R heißt kommutativ, falls:

- $a * b = b * a$ f.a. $a, b \in \mathbb{R}$

Ein kommutativer Ring mit $1 \neq O$ heißt Körper, falls:

- zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein $a^{-1} \in \mathbb{R}$ mit $a * a^{-1} = 1$
- Ist $\mathbb{R}$ ein Körper, so ist $\mathbb{R}* = \mathbb{R}/(0)$ mit $*$ eine abelsche Gruppe.
- $\mathbb{Z}$ mit + und * ist ein kommutativer Ring mit $1 \neq 0$ aber kein Körper
- $\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{R}$ mit + und * ist ein Körper

Zerlegen in primäre Elemente

Jede ganze Zahl $n > 0$ lässt sich bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen.

Konstruktion von rationalen Zahlen aus $\mathbb{Z}$

Sei $M = \mathbb{Z}x(\mathbb{Z}/0)$ die Menge von Brüchen. Durch $(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow ad = bc$ wird Äquivalenzrelation auf M durchgeführt. Definiere Operationen +,* auf $\mathbb{Q}$ wie folgt:

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{b*d}$ (wohldefiniert)
- $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a*c}{b*d}$

Satz: $\mathbb{Q}$ mit +,* ist ein Körper.

Ring der formalen Potenzreihe

Sei k ein Körper. Eine Folge $(a_0, a_1, ..., a : n) \in K^{\mathbb{N}}$ mit Einträgen aus K heißt formale Potenzreihe $K[[x]]$. Die Menge aller Polynome wird mit $K[x]$ bezeichnet. $K[[x]]$ wird mit +,* zu einem kommutativen Ring mit $1 \neq 0$

- +: $(a_0, a_1, ...) + (b_0, b_1, ...) = (a_o + b_0, a_1 + b_1, ...)$
- *: $(a_0, a_1, ...) + (b_0, b_1, ...) = (c_0, c_1, ...)$ mit $c_K = \sum_{j=a}^{k} a_j * b_{k-j}$

B mit $\vee, \wedge, ^-$ seien boolesche Algebren. Sie heißen isomorph, falls es einen Isomorphismus von B nach $\dot{B}$ gibt, d.h. eine Bijektion $\phi : B \to \dot{B}$ mit:

- $\phi(a \vee b) = \phi(a) \dot{\vee} \phi(b)$
- $\phi(a \wedge b) = \phi(a) \dot{\wedge} \phi(b)$
- $\phi(\bar{a}) = \dot{\overline{\phi(a)}}$

Lemma: Sei B mit $\vee, \wedge, ^-$ eine boolesche Algebra, dann gilt:

- $a \vee T = T$ f.a. $a \in B$
- $a \wedge \perp = \perp$ f.a. $a \in B$
- $a \vee b$ ist obere Schranke von a, b, d.h. $a \leq a \vee b$, dann $a \vee (a \vee b) = a \vee b$
- $a \vee b$ ist kleinste obere Schranke, d.h. $a \leq z$ und $b \leq z$ folgt $a \vee b \leq z$

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Paar (Ω, p) bestehend aus einer endlichen Menge Ω und einer Funktion $p : \Omega \to [0, 1] \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$. Jeder derartige p heißt Verteilung auf Ω. Die Elemente aus Ω heißen Elementarereignis, eine Teilmenge A von Ω heißt ein Ereignis; seine Wahrscheinlichkeit ist definiert durch $p(A) := \sum_{\omega in A} p(\omega)$. $A = \emptyset$ und jede andere Menge $A \subseteq \Omega$ mit $p(A) = 0$ heißt unmöglich (unmögliches Ereignis). $A = \Omega$ und jede andere Menge $A \subseteq \Omega$ mit $p(A) = 1$ heißt sicher (sicheres Ereignis). Es gilt für Ereignisse $A, B, A_1, ..., A_k$:

- $A \subseteq B \to p(A) \leq p(B)$
- $p(A \cup B) \to p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- disjunkt($A_i \cap A_J = \emptyset$ für $i \neq j$) so gilt $p(A_1 \cup ... \cup A_k) = p(A_1) + ... + p(A_k)$
- $p(\Omega/A) :=$ Gegenereignis von $A = 1 - p(A)$
- $p(A_1, ..., A_k) \leq p(A_1) + ... + p(A_k)$

(Ω, p) heißt Produktraum von $(\Omega_1, p_1), ...$. $A, B \in \Omega$ heißen (stochastisch) unabhängig, falls $p(A \cap B) = p(A) * p(B)$.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$B \subseteq \Omega$ ("bedingtes Ereignis") mit $p(B) > 0$, dann ist $p_B : B \to [0, 1]; p_B(\omega) = \frac{p(\omega)}{p(B)}$ eine Verteilung auf B. Für $A \subseteq \Omega$ gilt
$p_B(A \cap B) = \sum p_B(\omega) = \sum \frac{p(\omega)}{p(B)} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} := p(A|B)$ bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter B.
$p(A|B) = \frac{p(B|A)*p(A)}{p(B)}$

Erwartung, Varianz, Covarianz

Erwartungswert $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)p(\omega)$ Linearität von E: $E(x + y) = E(x) + E(y)$ und $E(\alpha x) = \alpha E(x)$. Varianz von X: $Var(X) = E((X^2) - E(X))^2)$ Covarianz: $Cov(X, Y) = E((X - E(X)) * (Y - E(Y)))$ Verschiebungssatz: $Cov(X, Y) = E(X * Y) - E(X) * E(Y)$ $Var(X) = Cov(X, X) = E(X * X) - E(X)E(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
Sind X,Y stochastisch unabhängig ZVA, so ist $E(X) * E(Y) = E(X * Y)$; folglich $Cov(X, Y) = 0$
Bernoulliverteilt falls $p(X = 1) = p$ und $p(X = 0) = 1 - p$, $p \in [0, 1]$. $E(X) = \sum x * p(X = x) = 1 * p(X = 1) = p$

Binominalkoeffizienten

N sei Menge, dann ist $\binom{N}{k} := (x \subseteq N :$ x hat genau k Elemente $(|x| = k))$ für $k \in \mathbb{N}$.
$\binom{N}{0} = (\emptyset)$, $\binom{N}{n} = N \to \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ $\binom{n}{0} = 1$,
$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Hypergeometrische Verteilung

Beispiel: Urne mit zwei Sorten Kugeln; N Gesamtzahl der Kugeln, M Gesamtzahl Kugeln Sorte 1, N-M Gesamtzahl Kugeln Sorte 2, $n \leq N$ Anzahl Elemente einer Stichprobe. X Anzahl der Kugeln Sorte 1 in einer zufälligen n-elementigen Stichprobe.
$p(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

$E(X) = \sum_{x=0}^{M} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = ... = n * \frac{M}{N}$
$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = n * \frac{M}{N}(1 - \frac{M}{N})\binom{N-n}{N-1}$

Elementare Graphentheorie

$G = (V, E)$ heißt Graph mit Eckenmenge $V(G) = V$ und Kantenmenge $E(G) = E \subseteq x, y : x \neq y \in V$. Für $(a, b) \in V(G)$ heißt $d_G(a, b) = min(l :$ es gibt einen a,b-Weg der Länge l) Abstand von a nach b. G heißt zusammenhängend, wenn G höchstens eine Komponente besitzt.

- $d_G(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$ f.a. $x, y \in V(G)$
- $d_G(x, y) = d_G(y, x)$ f.a. $x, y \in V(F)$
- $d_G(x, z) \leq d_G(x, y) + d_G(y, z))$ f.a. $x, y, z \in V(G)$

$\leq$ ist Ordnung, denn:

- $G \leq G$
- $H \leq G \wedge G \leq H \rightarrow H = G$
- $H \leq G \wedge G = L \rightarrow H \leq L$

Ein Teilgraph H des Graphen G heißt aufspannend, falls $V(H) = V(G)$. Weiter $N_G(x) := x \in V(G) : xy \in E(G)$ die Menge der nachbarn von x in G. Hier gilt: $|N_G(x) = d_G(x)|$. In jedem Graph G gilt $\sum_{x \in V(G)} d_G(x) = 2|E(G)|$. Der Durchschnittsgrad von G ist somit $d(\bar{G}) = \frac{1}{|V(G)|}\sum d_G(x) = \frac{2|E(G)|}{|V(G)|}$.
Ein Graph ist ein Baum wenn "G ist minimal zusammenhängend und kreisfrei"

- G ist kreisfrei und zusammenhängend
- G kreisfrei und $|E(G)| = |V(G)| - 1$
- G zusammenhängend und $|E(G)| = |V(G)| - 1$

Breitensuchbaum von G falls $d_F(z, x) = d_G(z, x)$ f.a. $z \in V(G)$. Tiefensuchbaum von G falls für jede Kante zy gilt: z liegt auf dem y,x-Weg in T oder y liegt auf dem z,t-Weg in T.
Satz: Sei G zusammenhängender Graph $x \in V(G)$. (X) sind $x_0, ..., x_{e-1}$ schon gewählt und gibt es ein $+ \in (0, ..., e-1)$ so, dass x_+ einen Nachbarn y in $V(G)$ $(x_0, ..., x_{e-1})$, so setze $x_e = y$ und $f(e) := t$; iteriere mit $e + 1$ statt e. Dann ist $T := (x_0, ..., x_e, x_j * x_{f(j)} : j \in 1, ..., e)$ ein Spannbaum

- f(e) wird in + stets kleinstmöglich gewählt, so ist T ein Breitensuchbaum
- f(e) wird in + stets größtmöglich gewählt, so ist T ein Tiefensuchbaum

Spannbäume minimaler Gewichte

Sei G zuständiger Graph, $\omega : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$; Setze $F = \emptyset$. Solange es eine Kante $e \in E(G)/F$ gibt so, dass $F \vee (e)$ kreisfrei ist, wähle e mit minimalem Gewicht $\omega(e)$, setzte $F = F \vee e$, iterieren. Das Verfahren endet mit einem Spannbaum $T = G(F)$ minimalen Gewichts.

Das Traveling Salesman Problem

Konstruiere eine Folge$x_0, ..., x_m$ mit der Eigenschaft, dass jede Kante von T genau zweimal zum Übergang benutzt wird, d.h. zu $e \in E(T)$ existieren $i \neq j$ mit $e = x_i x_{i+1}$ und $e = x_j x_{j+1}$ und zu jedem k existieren $e \in E(T)$ mit $e = x_k x_{k+1}$. Das Gewicht dieser Folge sei $\sum \omega(x_i x_{i+1}) = 2\omega(T)$. Eliminiere Mehrfachnennungen in der Folge. Durch iteration erhält man einen aufspannenden Kreis mit $\omega(X) \leq 2\omega(T)$.

Färbung & bipartit

Eine Funktion $f : V(G) \rightarrow C$ mit $|C| \leq k$ heißt k-Färbung, falls $f(x) \neq f(y)$ für $xy \in E(G)$. Ein Graph heißt bipartit mit den Klassen A,B falls $(x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in B \wedge y \in A)$. Mit Bipartitheit gilt G hat ein Matching von A $\leftrightarrow |N_G(X)| \leq |X|$ für alle $X \subseteq A$.