4 Probleme natürlicher Sprache

was sind Formeln?

Bezeichnungen in Formeln

$(\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i)$ statt ...

$(\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i)$ statt ...

$(\varphi \leftrightarrow \psi)$ statt ...

Präzedenz der Operatoren

triviale Deduktion

Konjunktionseinführung

Konjunktionselimination

1. Alle atomaren Formeln und $\perp$ sind Formeln.
2. Falls φ und ψ Formeln sind, sind auch $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \wedge \psi)(\varphi \rightarrow \psi)$und $\neg\varphi$Formeln.
3. Nichts ist Formel, was sich nicht mittels der obigen Regeln erzeugen läßt.

1. Zuordnung von Wahrheitswerten zu Aussagen ist problematisch.
2. Natürliche Sprache ist oft schwer verständlich.
3. Natürliche Sprache ist mehrdeutig.
4. Natürliche Sprache hängt von Kontext ab.

$(\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i$ statt $(...((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \vee ... \vee \varphi_n)$

- Falsum: $\perp$
- Konjunktion: $\wedge$
- Disjunktion: $\vee$
- Implikation: $\rightarrow$
- Negation: $\neg$

$(\varphi \leftrightarrow \psi)$ statt $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$

$(\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i)$ statt $(...((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \wedge ... \wedge \varphi_n)$

Aus der Annahme der Aussage φ folgt φ unmittelbar.
φ mit Hypothesen $\{\varphi\}$ und Konklusion φ.

- $\leftrightarrow$ bindet am schwächsten
- $\rightarrow$...
- $\vee$...
- $\wedge$...
- $\neg$ bindet am stärksten

Ist D eine Deduktion von $\varphi \wedge \psi$ mit Hypothesen aus Γ, so ergeben sich die folgenden Deduktionen von φ bzw. von ψ mit Hypothesen aus Γ:

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge E_1)$$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ (\wedge E_2)$$

Ist D eine Deduktion von φ mit Hypothesen aus Γ und ist E eine Deduktion von ψ mit Hypothesen aus Γ, so ergibt sich die folgende Deduktion von $\varphi \wedge \psi$ mit Hypothesen aus Γ:

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge I)$$

Natürliches Schliessen

Implikationseinführung

Natürliches Schliessen

Implikationselimination

Natürliches Schliessen

Disjunktionselimination

Natürliches Schliessen

Disjunktionseinführung

Natürliches Schliessen

Negationseinführung

Natürliches Schliessen

Negationselimination

Natürliches Schliessen

Falsum

Natürliches Schliessen

reductio ad absurdum

Natürliches Schliessen

$$\Gamma \Vdash \varphi$$

Natürliches Schliessen

$$\neg(\varphi \vee \psi)$$

oder modus ponens
Ist D eine Deduktion von φ mit Hypothesen aus Γ und ist E eine Deduktion von $\varphi \to \psi$ mit Hypothesen aus Γ, so ergibt sich die folgende Deduktion von ψ mit Hypothesen aus Γ:

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to E)$$

Ist D eine Deduktion von ψ mit Hypothesen aus $\Gamma \cup \{\varphi\}$, so ergibt sich die folgende Deduktion von $\varphi \to \psi$ mit Hypothesen aus Γ:

$$\frac{\begin{matrix}[\varphi]\\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}\ (\to I)$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee I_1)$$

$$\frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee I_2)$$

oder Fallunterscheidung
Ist D eine Deduktion von $\varphi \vee \psi$ mit Hypothesen aus Γ, ist E eine Deduktion von σ mit Hypothesen aus $\Gamma \cup \{\varphi\}$und ist F eine Deduktion von σ mit Hypothesen aus $\Gamma \cup \{\psi\}$, so ergibt sich die folgende Deduktion von σ mit Hypothesen aus Γ:

$$\frac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{matrix}[\varphi]\\ \delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi]\\ \delta\end{matrix}}{\psi}\ (\vee E)$$

Ist D eine Deduktion von $\neg\varphi$ mit Hypothesen aus Γ und ist E eine Deduktion von φ mit Hypothesen aus γ, so ergibt sich die folgende Deduktion von $\perp$ mit Hypothesen aus Γ:

$$\frac{\neg\varphi \qquad \varphi}{\perp}\ (\neg E)$$

Ist D eine Deduktion von $\perp$ mit Hypothesen aus $\Gamma \cup \{\varphi\}$, so ergibt sich die folgende Deduktion von $\neg\varphi$ mit Hypothesen aus Γ:

$$\frac{\begin{matrix}[\varphi]\\ \perp\end{matrix}}{\neg\varphi}\ (\neg I)$$

Ist D eine Deduktion von $\perp$ mit Hypothesen aus $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, so ergibt sich die folgende Deduktion von φ mit Hypothesen aus Γ:

$$\frac{\begin{matrix}[\neg\varphi]\\ \perp\end{matrix}}{\varphi}\ (\perp)$$

ex falso sequitur quodlibet
ausführlich: Ist D eine Deduktion von $\perp$ mit Hypothesen aus Γ, so ergibt sich die folgende Deduktion von φ mit Hypothesen aus Γ:

$$\frac{\perp}{\varphi}\ (\perp)$$

Für alle Formeln φ und ψ gilt $\{\neg(\varphi \vee \psi)\} \Vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi$.

Für eine Formelmenge Γ und eine Formel φ schreiben wir $\Gamma \Vdash \varphi$ wenn es eine Deduktion gibt mit Hypothesen aus Γ und Konklusion φ. Wir sagen "φ ist eine syntaktische Folgerung von Γ".
Eine Formel φ ist ein Theorem, wenn $\varnothing \Vdash \varphi$ gilt.
$\Gamma \Vdash \varphi$ sagt (zunächst) nichts über den Inhalt der Formeln in $\Gamma \cup \{\varphi\}$ aus, sondern nur über die Tatsache, dass φ mithilfe des natürlichen Schließens aus den Formeln aus Γ hergeleitet werden kann.
Ebenso sagt "φ ist Theorem" nur, dass φ abgeleitet werden kann, über "Wahrheit" sagt dieser Begriff (zunächst) nichts aus.

Natürliches Schliessen

$\neg\neg\varphi$

Natürliches Schliessen

Für jede Formel φ ist $\varphi \vee \neg\varphi$...

Natürliches Schliessen

$\{\neg(\varphi \wedge \psi)\} \Vdash \ldots$

Semantik

Idee der Semantik

Semantik

zweiwertige Logik

Semantik

dreiwertige Logik

Semantik

Fuzzy-Logik

Semantik

unendliche Boolesche Algebra

Semantik

Heyting-Algebra

Semantik

offen vs. nicht offene Teilmengen

Für jede Formel φ ist $\varphi \vee \neg\varphi$ ein Theorem.
Beweis: Wir geben eine Deduktion mit Konklusion $\varphi \vee \neg\varphi$ ohne Hypothesen an...

Für jede Formel φ ist $\neg\neg\varphi \to \varphi$ ein Theorem.

wenn man jeder atomaren Formel p_i einen Wahrheitswertzuordnet, so kann man den Wahrheitswert jeder Formel berechnen.

$\{\neg(\varphi \wedge \psi)\} \Vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$

Kleene-Logik $K_3 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$:
zusätzlicher Wahrheitswert ,,unbekannt" $= \frac{1}{2}$

Boolesche Logik $B = \{0, 1\}$
Wahrheitswerte ,,wahr"=1 und ,,falsch"$= 0$

B_R= Menge der Teilmengen von $\mathbb{R}$;
$A \subseteq \mathbb{R}$ ist ,,Menge der Menschen, die Aussage für wahr halten"

$F = [0, 1]$: Wahrheitswerte sind ,,Grad der Überzeugtheit"

offen: $(0, 1), \mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R}\backslash\{0\}, \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$
nicht offen: $[1, 2), \mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}, \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

H_R= Menge der offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$
Erinnerung: $A \subseteq \mathbb{R}$ offen, wenn $\forall a \in A \exists\epsilon > 0 : (a - \epsilon, a + \epsilon) \subseteq A$, d.h. wenn A abzählbare Vereinigung von offenen Intervallen (x, y) ist.

Semantik

W-Belegung

Wahrheitswertebereiche

Definition: Sei W eine Menge und $R \subseteq W \times W$ eine binäre Relation.

Wahrheitswertebereiche

reflexive Relation

Wahrheitswertebereiche

antisymmetrische Relation

Wahrheitswertebereiche

transitive Relation

Wahrheitswertebereiche

Ordnungsrelation

Wahrheitswertebereiche

Schranken

Wahrheitswertebereiche

obere Schranke

Wahrheitswertebereiche

kleinste obere Schranke

Wahrheitswertebereiche

untere Schranke

Sei W eine Menge und $R \subseteq W \times W$ binäre Relation.

- R ist reflexiv
- R ist antisymmetrisch
- R ist transitive
- R ist eine Ordnungsrelation

Sei W eine Menge von Wahrheitswerten.
Eine W-Belegung ist eine Abbildung $B : V \to W$, wobei $V \subseteq \{p_0, p_1, ...\}$ eine Menge atomarer Formeln ist.
Die W-Belegung $B : V \to W$ paßt zur Formel ϕ, falls alle atomaren Formeln aus ϕ zu V gehören.

R ist antisymmetrisch, wenn $(a, b), (b, a) \in R$ impliziert, dass $a = b$ gilt (für alle $a, b \in W$).

R ist reflexiv, wenn $(a, a) \in R$ für alle $a \in W$ gilt.

R ist eine Ordnungsrelation, wenn R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. In diesem Fall heißt das Paar (W, R) eine partiell geordnete Menge.

R ist transitive, wenn $(a, b), (b, c) \in R$ impliziert, dass $(a, c) \in R$ gilt (für alle $a, b, c \in W$).

$(W, \leq)$ partiell geordnete Menge, $M \subseteq W$ und $a \in W$
a ist obere Schranke von M, wenn $m \leq a$ für alle $m \in M$ gilt

$(W, \leq)$ partiell geordnete Menge, $M \subseteq W$ und $a \in W$

- a ist obere Schranke von M, wenn $m \leq a$...
- a ist kleinste obere Schranke oder Supremum...
- a ist untere Schranke von M, wenn $a \leq m$...
- a ist größte untere Schranke oder Infimum...

Sei $(W, \leq)$ partiell geordnete Menge, $M \subseteq W$ und $a \in W$.
a ist untere Schranke von M, wenn $a \leq m$ für alle $m \in M$ gilt.

$(W, \leq)$ partiell geordnete Menge, $M \subseteq W$ und $a \in W$
a ist kleinste obere Schranke/Supremum von M, wenn a obere Schranke von M ist und wenn $a \leq b$ für alle oberen Schranken b von M gilt. Wir schreiben in diesem Fall $a = sup\ M$.
z.B. $(W, \leq)$ mit $W = R$ und $\leq$ übliche Ordnung auf R

- dann gelten sup[0, 1] = sup(0, 1) = 1.
- $sup\ W$ existiert nicht (W keine obere Schranke)

größte untere Schranke

(vollständiger) Verband

Wahrheitswertebereich (Tupel?)

Boolesche Wahrheitswertebereich B

Kleenesche Wahrheitswertebereich

Wahrheitswertebereiche Fuzzy-Logik

Boolesche Wahrheitswertebereich B_R

Heytingsche Wahrheitswertebereich H_R

$\hat{B}(\phi) \in W$ **jeder zu** B **passenden Formel** ϕ

W-Folgerung

Ein (vollständiger) Verband ist eine partiell geordnete Menge $(W, \leq)$, in der jede Menge $M \subseteq W$ ein Supremum $sup\ M$ und ein Infimum $inf\ M$ hat. In einem Verband $(W, \leq)$ definieren wir:

- $0_W = inf\ W$ und $1_W = sup\ W$
- $a \wedge_W b = inf\{a, b\}$ und $a \vee_W b = sup\{a, b\}$ für $a, b \in W$

In jedem Verband $(W, \leq)$ gelten $0_W = sup\ \varnothing$ und $1_W = inf\ \varnothing$ (denn jedes Element von W ist obere und untere Schranke von $\varnothing$).

Sei $(W, \leq)$ partiell geordnete Menge, $M \subseteq W$ und $a \in W$.
a ist größte untere Schranke oder Infimum von M, wenn a untere Schranke von M ist und wenn $b \leq a$ für alle unteren Schranken b von M gilt. Wir schreiben in diesem Fall $a = inf\ M$.

Der Boolesche Wahrheitswertebereich B ist definiert durch die Grundmenge $B = \{0, 1\}$, die natürliche Ordnung $\leq$ und die Funktionen $\neg_B(a) = 1 - a$, $\rightarrow_B (a, b) = max(b, 1 - a)$. Hier gelten:

- $0_B = 0$, $1_B = 1$,
- $a \wedge_B b = min(a, b)$, $a \vee_B b = max(a, b)$

Ein Wahrheitswertebereich ist ein Tupel $(W, \leq, \rightarrow W, \neg W)$, wobei $(W, \leq)$ ein Verband und $\rightarrow W : W^2 \rightarrow W$ und $\neg W : W \rightarrow W$ Funktionen sind.

Der Wahrheitswertebereich F der Fuzzy-Logik ist definiert durch die Grundmenge $F = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ mit der natürlichen Ordnung $\leq$ und durch die Funktionen $\neg_F(a) = 1 - a$, $\rightarrow_F (a, b) = max(b, 1 - a)$. Hier gelten:

- $0_F = 0$, $1_F = 1$
- $a \wedge_F b = min(a, b)$, $a \vee_F b = max(a, b)$

Der Kleenesche Wahrheitswertebereich K_3 ist definiert durch die Grundmenge $K_3 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ mit der natürlichen Ordnung $\leq$ und durch die Funktionen $\neg_{K_3}(a) = 1 - a$, $\rightarrow_{K_3} (a, b) = max(b, 1 - a)$. Hier gelten:

- $\neg_{K_3} = 0$, $1_{K_3} = 1$
- $a \wedge_{K_3} b = min(a, b)$, $a \vee_{K_3} b = max(a, b)$

Der Heytingsche Wahrheitswertebereich H_R ist definiert durch die Grundmenge $H_{\mathbb{R}} = \{A \subseteq \mathbb{R} | \text{A ist offen}\}$, die Ordnung $\subseteq$ und durch die Funktionen $\neg_{H_R}(A) = Inneres(\mathbb{R} \backslash A)$, $\rightarrow_{H_R} (A, B) = Inneres(B \cup \mathbb{R} \backslash A)$. Hier gelten:

- $0_{H_R} = \varnothing$, $1_{H_R} = \mathbb{R}$
- $A \wedge_{H_R} B = A \cap B$, $A \vee_{H_R} B = A \cup B$
- $Inneres(A) = \{a \in A | \exists \epsilon > 0 : (a - \epsilon, a + \epsilon) \subseteq A\}$

Der Boolesche Wahrheitswertebereich B_R ist definiert durch die Grundmenge $B_R = \{A | A \subseteq \mathbb{R}\}$ mit der Ordnung $\subseteq$ und durch die Funktionen $\neg_{B_R}(A) = \mathbb{R} \backslash A$, $\rightarrow_{B_R} (A, B) = B \cup \mathbb{R} \backslash A$. Hier gelten:

- $0_{B_R} = \varnothing$, $1_{B_R} = \mathbb{R}$
- $A \wedge_{B_R} B = A \cap B$, $A \vee_{B_R} B = A \cup B$

Sei W ein Wahrheitswertebereich. Eine Formel ϕ heißt eine W-Folgerung der Formelmenge Γ, falls für jede W-Belegung B, die zu allen Formeln aus $\Gamma \cup \{\phi\}$ paßt, gilt: $inf\{B(\gamma) | \gamma \in \Gamma\} \leq B(\phi)$
Wir schreiben $\Gamma \Vdash W\phi$, falls ϕ eine W-Folgerung von Γ ist.
Bemerkung: Im Gegensatz zur Beziehung $\Gamma \vdash \phi$, d.h. zur syntaktischen Folgerung, ist $\Gamma \Vdash W\phi$ eine semantische Beziehung.

W Wahrheitswertebereich und B W-Belegung. Über Formelaufbau definieren wir Wahrheitswert $\hat{B}(\phi) \in W$ jeder zu B passenden Formel ϕ:

- $\hat{B}(\perp) = 0_W$
- $\hat{B}(p) = B(p)$ falls p eine atomare Formel ist
- $\hat{B}((\phi \wedge \psi)) = \hat{B}(\phi) \wedge_W \hat{B}(\psi)$
- $\hat{B}((\phi \vee \psi)) = \hat{B}(\phi) \vee_W \hat{B}(\psi)$
- $\hat{B}((\phi \rightarrow \psi)) = \rightarrow W(\hat{B}(\phi), \hat{B}(\psi))$
- $\hat{B}(\neg\phi) = \neg W(\hat{B}(\phi))$

Wahrheitswertebereiche

W-Tautologie

Wahrheitswertebereiche

$\varnothing \Vdash_W \neg\neg\phi \to \phi$ **gilt für Wahrheitsbereiche...**

Wahrheitswertebereiche

$\varnothing \Vdash_W \phi \vee \neg\phi$

Wahrheitswertebereiche

$\{\neg\phi \to \bot\} \Vdash_W \phi$ **gilt für Wahrheitsbereiche...**

Wahrheitswertebereiche

$\{\phi\} \Vdash_W \neg\phi \to \bot$ **gilt für Wahrheitsbereiche...**

Wahrheitswertebereiche

syntaktische Folgerung

Wahrheitswertebereiche

Theorem

Wahrheitswertebereiche

W-Tautologie

Wahrheitswertebereiche

(semantische) W-Folgerung

Korrekheit

Frage der Korrektheit

$B, B_{\mathbb{R}}$

Eine W-Tautologie ist eine Formel ϕ mit $\varnothing \Vdash W\phi$, d.h. $B(\phi) = 1_W$ für alle passenden W-Belegungen B (denn $inf\{\hat{B}(\gamma)|\gamma \in \varnothing\} = inf\varnothing = 1_W$).

$B, B_{\mathbb{R}}, K_3, F$

$B, B_{\mathbb{R}}$

$\Gamma \vdash \phi$ syntaktische Folgerung

$B, B_{\mathbb{R}}, K_3, F, H_{\mathbb{R}}$

W-Tautologie = ,,wird immer zu 1_W ausgewertet"

Theorem = ,,hypothesenlos ableitbar"

Können wir durch mathematische Beweise zu falschen Aussagenkommen? Können wir durch das natürliche Schließen zu falschen Aussagen kommen? Existiert eine Menge Γ von Formeln und eine Formel φ mit $\Gamma \vdash \varphi$ und $\Gamma \nVdash_W \varphi$? Für welche Wahrheitswertebereiche W?
Für welche Wahrheitswertebereiche W gilt

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash_W \varphi$$

bzw. φ ist Theorem $\Rightarrow \varphi$ ist W-Tautologie?

$\Gamma \Vdash_W \phi$ (semantische) W-Folgerung

Korrekheit

Korrektheitslemma für nat. Schließen & Wahrheitswertebereich B

Korrekheit

Korrektheitssatz für natürliches Schließen & Wahrheitswertebereich B

Korrekheit

Jedes Theorem ist eine B-Tautologie?

Korrekheit

Korrektheitssatz für natürliches Schließen & Wahrheitswertebereich $B_{\mathbb{R}}$

Korrekheit

Jedes Theorem ist eine $B_{\mathbb{R}}$-Tautologie?

Korrekheit

Korrektheitslemma für nat. Schließen & Wahrheitswertebereich $H_{\mathbb{R}}$

Korrekheit

Korrektheitssatz für nat. Schließen & Wahrheitswertebereich $H_{\mathbb{R}}$

Korrekheit

Jedes (raa)-frei herleitbare Theorem ist eine $H_{\mathbb{R}}$-Tautologie?

Korrekheit

Deduktion von Thermen ohne Hypothesen mit (raa)

Vollständigkeit

Frage der Vollständigkeit

Für jede Menge von Formeln Γ und jede Formel φ gilt $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash_B \varphi$.
Beweis: Wegen $\Gamma \vdash \varphi$ existiert eine Deduktion D mit Hypothesen in Γ und Konklusion φ. Nach dem Korrektheitslemma folgt $\Gamma \vdash_B \varphi$.

Sei D eine Deduktion mit Hypothesen in der Menge Γ und Konklusion φ. Dann gilt $\Gamma \vdash_B \varphi$, d.h. $inf\{B(\gamma)|\gamma \in \Gamma\} \leq B(\varphi)$ für alle passenden B-Belegungen B.

Für jede Menge von Formeln Γ und jede Formel φ gilt $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash_{B_{\mathbb{R}}} \varphi$. Definition

wahr

Sei D eine Deduktion mit Hypothesen in der Menge Γ und Konklusion φ, die die Regel (raa) nicht verwendet. Dann gilt $\Gamma \vdash_{H_{\mathbb{R}}} \varphi$.

wahr

wahr

Für jede Menge von Formeln Γ und jede Formel φ gilt $\Gamma \vdash \varphi$ ohne $(raa) \Rightarrow \Gamma \vdash_{H_{\mathbb{R}}} \varphi$

Können wir durch mathematische Beweise zu allen korrekten Aussagen kommen? Können wir durch das natürliche Schließen zu allen korrekten Aussagen kommen?
Existiert eine Menge Γ von Formeln und eine Formel φ mit $\Gamma \vdash_W \varphi$ und $\Gamma \nvdash \varphi$? Für welche Wahrheitswertebereiche W? Für welche Wahrheitswertebereiche W gilt $\Gamma \vdash_W \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$ bzw. φ ist W-Tautologie $\Rightarrow \varphi$ ist Theorem?

Jede Deduktion der Theoreme $\neg\neg\varphi \to \varphi$ und $\varphi \vee \neg\varphi$ ohne Hypothesen verwendet (raa).

Vollständigkeit

Konsistente Mengen

Vollständigkeit

Lemma konsistente Menge

Vollständigkeit

Maximal konsistente Mengen

Vollständigkeit

Satz maximal konsistene Menge

Vollständigkeit

Sei Δ maximal konsistent und gelte $\Delta \vdash \varphi$

Vollständigkeit

Sei Δ maximal konsistent und φ Formel

Erfüllbare Mengen

Γ heißt erfüllbar, wenn

Erfüllbare Mengen

$Delta$ **maximal konsistente Menge**

Erfüllbare Mengen

$\Gamma \nVdash_B \varphi \Leftrightarrow ...$

Erfüllbare Mengen

$\Gamma \Vdash W\varphi \Rightarrow ...$

Sei Γ eine Menge von Formeln und φ eine Formel. Dann gilt $\Gamma \nvdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ konsistent.

Sei Γ eine Menge von Formeln. Γ heißt inkonsistent, wenn $\Gamma \vdash \perp$ gilt. Sonst heißt Γ konsistent.

Jede konsistente Formelmenge Γ ist in einer maximal konsistenten Formelmenge Δ enthalten.

Eine Formelmenge Δ ist maximal konsistent, wenn sie konsistent ist und wenn gilt „$\sum \supseteq \Delta$ konsistent $\Rightarrow \sum = \Delta$”.

Sei Δ maximal konsistent und φ Formel. Dann gilt $\varphi \notin \Delta \Leftrightarrow \neg\varphi \in \Delta$.

Sei Δ maximal konsistent und gelte $\Delta \vdash \varphi$. Dann gilt $\varphi \in \Delta$.

Sei Δ eine maximal konsistente Menge von Formeln. Dann ist Δ erfüllbar.

Sei Γ eine Menge von Formeln. Γ heißt erfüllbar, wenn es eine passende B-Belegung B gibt mit $B(\gamma) = 1_B$ für alle $\gamma \in \Gamma$.
Die Erfüllbarkeit einer endlichen Menge Γ ist entscheidbar (NP-vollständig)

Sei W einer der Wahrheitswertebereiche B, K_3, F, H_R und B_R, Γ eine Menge von Formeln und φ eine Formel. Dann gilt $\Gamma \Vdash W\varphi \Rightarrow \Gamma \Vdash B\varphi$.

Sei Γ eine Menge von Formeln und φ eine Formel. Dann gilt $\Gamma \nVdash_B \varphi \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ erfüllbar.

Erfüllbare Mengen

Vollständigkeitssatz

Vollständigkeit und Korrektheit

Satz $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \Vdash_B \varphi$

Entscheidbarkeit

Satz Menge der Theoreme

Vollständigkeit und Korrektheit

Äquivalenzen und Theoreme

Vollständigkeit und Korrektheit

Liste der Äquivalenzen 1/2

Vollständigkeit und Korrektheit

Liste der Äquivalenzen 2/2

Vollständigkeit und Korrektheit

Zusammenhang zw. Theoremen und Äquivalenzen

Vollständigkeit und Korrektheit

α ist Theorem $\Leftrightarrow \alpha \equiv \neg\bot$

Kompaktheitsatzes

Kompaktheit

Kompaktheitsatzes

Kompaktheits- oder Endlichkeitssatz

Seien Γ eine Menge von Formeln und φ eine Formel. Dann gilt

$$\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \Vdash_B \varphi$$

Insbesondere ist eine Formel genau dann eine B-Tautologie, wenn sie ein Theorem ist.

- gilt für jede ,,Boolesche Algebra”, z.B. B_R
- $\Gamma \vdash \varphi$ ohne $(raa) \Leftrightarrow \Gamma \Vdash_{H_R} \varphi$ (Tarksi 1938)

Sei Γ eine Menge von Formeln, φ eine Formel und W einer der Wahrheitswertebereiche B, K_3, F, B_R und H_R. Dann gilt $\Gamma \Vdash_W \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$. Insbesondere ist jede W-Tautologie ein Theorem.

Zwei Formeln α und β heißen äquivalent $(\alpha \equiv \beta)$, wenn für alle passenden B-Belegungen B gilt: $B(\alpha) = B(\beta)$.

Satz: die Menge der Theoreme ist entscheidbar.

Es gelten die folgenden Äquivalenzen:

1. $(p_1 \wedge \neg p_1) \vee p_2 \equiv p_2$
2. $\neg\neg p_1 \equiv p_1$
3. $p_1 \wedge \neg p_1 \equiv \bot$
4. $p_1 \vee \neg p_1 \equiv \neg\bot$
5. $p_1 \rightarrow p_2 \equiv \neg p_1 \vee p_2$

Bemerkung: Mit den üblichen Rechenregeln für Gleichungen können aus dieser Liste alle gültigen Äquivalenzen hergeleitet werden.

Es gelten die folgenden Äquivalenzen:

1. $p_1 \vee p_2 \equiv p_2 \vee p_1$
2. $(p_1 \vee p_2) \vee p_3 \equiv p_1 \vee (p_2 \vee p_3)$
3. $p_1 \vee (p_2 \wedge p_3) \equiv (p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee p_3)$
4. $\neg(p_1 \vee p_2) \equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2$
5. $p_1 \vee p_1 \equiv p_1$

Bemerkung: Mit den üblichen Rechenregeln für Gleichungen können aus dieser Liste alle gültigen Äquivalenzen hergeleitet werden.

Sei α eine Formel. Dann gilt α ist Theorem $\Leftrightarrow \alpha \equiv \neg\bot$.

Seien α und β zwei Formeln. Dann gilt $\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta)$ ist Theorem.

Sei Γ eine u.U. unendliche Menge von Formeln. Dann gilt Γ unerfüllbar $\Leftrightarrow \exists \Gamma' \subseteq \Gamma$ endlich: Γ' unerfüllbar

Sei Γ eine u.U. unendliche Menge von Formeln und φ eine Formel mit $\Gamma \Vdash_B \varphi$. Dann existiert $\Gamma' \subseteq \Gamma$ endlich mit $\Gamma' \Vdash_B \varphi$.

Kompaktheitsatzes

Färbbarkeit

Kompaktheitsatzes

Sei $G = (N, E)$ ein Graph

Kompaktheitsatzes

Parkettierungen Idee

Kompaktheitsatzes

Kachelsystem Definition

Kompaktheitsatzes

Kachelsystem Satz

Erfüllbarkeit

Erfüllbarkeitsproblem

Erfüllbarkeit

Hornklausel

Erfüllbarkeit

Hornformel

Erfüllbarkeit

Markierungsalgorithmus

Erfüllbarkeit

Terminierung endlicher Menge von Hornklauseln

Sei $G = (N, E)$ ein Graph. Dann sind äquivalent

1. G ist 3-färbbar.
2. Für jede endliche Menge $W \subseteq N$ ist $G \restriction_W$ 3-färbbar.

Ein Graph ist ein Paar $G = (V, E)$ mit einer Menge V und $E \subseteq \binom{V}{2} = \{X \subseteq V : |V \Vdash 2\}$. Für $W \subseteq V$ sei $G \restriction_W = (W, E \cap \binom{W}{2})$ der von W induzierte Teilgraph. Der Graph G ist 3-färbbar, wenn es eine Abbildung $f : V \to \{1, 2, 3\}$ mit $f(v) \neq f(w)$ für alle $\{v, w\} \in E$.
Bemerkung: Die 3-Färbbarkeit eines endlichen Graphen ist NP-vollständig

Ein Kachelsystem besteht aus einer endlichen Menge C von „Farben" und einer Menge K von Abbildungen $\{N, O, S, W\} \to C$ von „Kacheln".
Eine Kachelung von $G \subseteq Z \times Z$ ist eine Abbildung $f : G \to K$ mit

- $f(i, j)(N) = f(i, j + 1)(S)$ für alle $(i, j), (i, j + 1) \in G$
- $f(i, j)(O) = f(i + 1, j)(W)$ für alle $(i, j), (i + 1, j) \in G$

Gegeben ist eine Menge von quadratischen Kacheln mit gefärbten Kanten. Ist es möglich, mit diesen Kacheln die gesamte Ebene zu füllen, so dass aneinanderstoßende Kanten gleichfarbig sind?

Eingabe: Formel Γ
Frage: existiert eine B-Belegung B mit $B(\Gamma) = 1_B$.

Sei K ein Kachelsystem. Es existiert genau dann eine Kachelung von $Z \times Z$, wenn für jedes $n \in N$ eine Kachelung von $\{(i, j) : |i|, |j| \leq n\}$ existiert.

Eine Hornformel ist eine Konjunktion von Hornklauseln.

Eine Hornklausel hat die Form $(\neg\bot \wedge p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n) \to q$ für $n \geq 0$, atomare Formeln $p_1, p_2, ..., p_n$ und q atomare Formel oder $q = \bot$. In der Literatur auch:

- $\{\neg p_1, \neg p_2, ..., \neg p_n, q\}$ für $\{p_1, ..., p_n\} \to q$ mit q atomare Formel
- $\{\neg p_1, \neg p_2, ..., \neg p_n\}$ für $\{p_1, ..., p_n\} \to \bot$
- $\Box$ für $\varnothing \to \bot$, die „leere Hornklausel"

Sei Γ endliche Menge von Hornklauseln. Dann terminiert der Markierungsalgorithmus mit dem korrekten Ergebnis.

Eingabe: eine endliche Menge Γ von Hornklauseln.

1. **while** es gibt in Γ eine Hornklausel $M \to q$, so daß alle $p \in M$ markiert sind und q unmarkierte atomare Formel ist $\Rightarrow$ **do** markiere q (in allen Hornklauseln in Γ)
2. **if** Γ enthält eine Hornklausel der Form $M \to \bot$, in der alle $p \in M$ markiert sind **then** return „unerfüllbar" **else** return „erfüllbar"

Erfüllbarkeit

SLD-Resolution Definition

Erfüllbarkeit

SLD-Resolution Beispiel
$\Gamma = \{\{BH\} \to AK, \{AK, BH\} \to \bot, \{RL, AK\} \to BH, \varnothing \to RL, \varnothing \to AK\}$

Erfüllbarkeit

Lemma A: Γ nicht erfüllbar

Erfüllbarkeit

Lemma B: SLD Resolution existiert

Erfüllbarkeit

Satz Äquivalenz bei Hornklauseln

Erfüllbarkeit

SLD-Resolution mit Breitensuche

Erfüllbarkeit

SLD-Resolution mit Tiefensuche

Prädikatenlogik

aussagenlogische Formel daß der Graph eine Kante enthält

Prädikatenlogik

aussagenlogische Formel daß jeder Knoten einen Nachbarn hat

Prädikatenlogik

aussagenlogische Formel daß der Graph ein Dreieck enthält

- $M_0 = \{AK, BH\}$
- $M_1 = M_0 \backslash \{BH\} \cup \{RL, AK\} = \{RL, AK\}$
- $M_2 = M_1 \backslash \{RL\} \cup \varnothing = \{AK\}$
- $M_3 = M_2 \backslash \{AK\} \cup \varnothing = \varnothing$

Sei Γ eine Menge von Hornklauseln. Eine SLD-Resolution aus Γ ist eine Folge $(M_0 \to \bot, M_1 \to \bot, ..., M_m \to \bot)$ von Hornklauseln mit

- $(M_0 \to \bot) \in \Gamma$
- für alle $0 \leq n < m$ existiert $(N \to q) \in \Gamma$ mit $q \in M_n$ und $M_{n+1} = M_n \backslash \{q\} \cup N$

Sei Γ eine (u.U. unendliche) unerfüllbare Menge von Hornklauseln. Dann existiert eine SLD-Resolution $(M_0 \to \bot, ..., M_m \to \bot)$ aus Γ mit $M_m = \varnothing$.

Sei Γ eine (u.U. unendliche) Menge von Hornklauseln und $(M_0 \to \bot, M_1 \to \bot, ..., M_m \to \bot)$ eine SLD-Resolution aus Γ mit $M_m = \varnothing$. Dann ist Γ nicht erfüllbar.

- findet SLD-Resolution mit $M_m = \varnothing$ (falls sie existiert), da Baum endlich verzweigend ist (d.h. die Niveaus sind endlich)
- hoher Platzbedarf, da ganze Niveaus abgespeichert werden müssen (in einem Binärbaum der Tiefe n kann es Niveaus der Größe 2^n geben)

Sei Γ eine (u.U. unendliche) Menge von Hornklauseln. Dann sind äquivalent:

1. Γ ist nicht erfüllbar.
2. Es gibt eine SLD-Resolution $(M_0 \to \bot, M_1 \to \bot, ..., M_m \to \bot)$ aus Γ mit $M_m = \varnothing$.

Die aussagenlogische Formel $\bigvee_{1\leq i,j\leq 9} \varphi_{i,j}$ sagt aus, daß der Graph eine Kante enthält.

- geringerer Platzbedarf (in einem Binärbaum der Tiefe n hat jeder Ast die Länge $\leq n$)
- findet existierende SLD-Resolution mit $M_m = \varnothing$ nicht immer

Die aussagenlogische Formel $\bigvee_{1\leq i,j,k\leq 9 \text{ verschieden}} \varphi_{i,j} \wedge \varphi_{j,k} \wedge \varphi_{k,i}$ sagt aus, daß der Graph ein Dreieck enthält.

Die aussagenlogische Formel $\bigwedge_{1\leq i\leq 9} \bigvee_{1\leq j\leq 9} \varphi_{i,j}$ sagt aus, daß jeder Knoten einen Nachbarn hat

Prädikatenlogik

Kodierung in einer „Struktur" aus

Prädikatenlogik

Definition Signatur

Prädikatenlogik

Menge der Variablen

Prädikatenlogik

Menge der $\sum$-Terme

Prädikatenlogik

Definition atomarer $\sum$-Formeln

Prädikatenlogik

Definition $\sum$-Formeln

Prädikatenlogik

Definition der freien Variablen

Prädikatenlogik

Definition $\sum$-Struktur

Prädikatenlogik

$\sum$-Struktur mit $U_A^0 = \{()\}$

Prädikatenlogik

A ist Modell von φ

Eine Signatur ist ein Tripel $\sum = (\Omega, Rel, ar)$, wobei Ω und Rel disjunkte Mengen von Funktions- und Relationsnamen sind und $ar : \Omega \cup Rel \to \mathbb{N}$ eine Abbildung ist.

Grundmenge Teilmengen Relationen Funktion Konstante

Sei $\sum$ eine Signatur. Die Menge $T_{\sum}$ der $\sum$-Terme ist induktiv definiert:

1. Jede Variable ist ein Term, d.h. $Var \subseteq T_{\sum}$
2. ist $f \in \Omega$ mit $ar(f) = k$ und sind $t_1, ..., t_k \in T_{\sum}$, so gilt $f(t_1, ..., t_k) \in T_{\sum}$
3. Nichts ist $\sum$-Term, was sich nicht mittels der obigen Regeln erzeugen läßt.

Die Menge der Variablen ist $Var = \{x_0, x_1, ...\}$.

1. Alle atomaren $\sum$-Formeln sind $\sum$-Formeln.
2. Falls φ, Ψ $\sum$-Formel, auch $(\varphi \wedge \Psi)$,$(\varphi \vee \Psi)$ und $(\varphi \to \Psi)$ $\sum$-Formeln.
3. Falls φ $\sum$-Formel, auch $\neg\varphi$ $\sum$-Formel.
4. Falls φ $\sum$-Formel und $x \in Var$, so sind auch $\forall x \varphi$ und $\exists x \varphi$ $\sum$-Formeln.
5. Nichts $\sum$-Formel, außer mittels obigen Regeln

Sei $\sum$ Signatur. Die atomaren $\sum$-Formeln sind die Zeichenketten der Form

- $R(t_1, t_2, ..., t_k)$ falls $t_1, t_2, ..., t_k \in T_{\sum}$ und $R \in Rel$ mit $ar(R) = k$ oder
- $t_1 = t_2$ falls $t_1, t_2 \in T_{\sum}$ oder
- $\perp$.

Sei $\sum$ eine Signatur. Eine $\sum$-Struktur ist ein Tupel $A = (U_A, (f^A)_{f \in \Omega}, (R^A)_{R \in Rel})$, wobei

- U_A eine nichtleere Menge, das Universum,
- $R^A \supseteq U_A^{ar(R)}$ eine Relation der Stelligkeit $ar(R)$ für $R \in Rel$ und
- $f^A : U_A^{ar(f)} \to U_A$ eine Funktion der Stelligkeit $ar(f)$ für $f \in \Omega$ ist.

Menge $FV(\varphi)$ der freien Variablen einer $\sum$-Formel φ:

- Ist φ atomare $\sum$-Formel, so ist $FV(\varphi)$ die Menge der in φ vorkommenden Variablen.
- $FV(\varphi \Box \Psi) = FV(\varphi) \cup FV(\Psi)$ für $\Box \in \{\wedge, \vee, \to\}$
- $FV(\neg\varphi) = FV(\varphi)$
- $FV(\exists x \varphi) = FV(\forall x \varphi) = FV(\varphi) \backslash \{x\}$.

$\sum$-Formel φ geschlossen oder $\sum$-Satz falls $FV(\varphi) = \varnothing$

Sei $\sum$ eine Signatur, φ eine $\sum$-Formel, Δ eine Menge von $\sum$-Formeln und A eine $\sum$-Struktur.

- $A \Vdash \varphi$ (A ist Modell von φ) falls $A \Vdash_p \varphi$ für alle Variableninterpretationen ρ gilt.
- $A \Vdash \Delta$ falls $A \Vdash \Psi$ für alle $\Psi \in \Delta$.

Bemerkung: $U_A^0 = \{()\}$.

- Also ist $a^A : U_A^0 \to U_A$ für $a \in \Omega$ mit $ar(a) = 0$ vollständig gegeben durch $a^A(()) \in U_A$. Wir behandeln 0-stellige Funktionen daher als Konstanten.
- Weiterhin gilt $R^A = \varnothing$ oder $R^A = \{()\}$ für $R \in Rel$ mit $ar(R) = 0$.