## Relationen

Sei $R \in AxA$ binäre Relation auf A

- Reflexiv $\leftrightarrow$ xRx $\forall x \in A$
- symmetrisch $\leftrightarrow$ xRy $\rightarrow$ yRx
- Antisymmetrisch $\leftrightarrow$ xRy $\wedge yRx \rightarrow x = y$
- Transitiv $\leftrightarrow$ xRy $\wedge$ yRz $\rightarrow$ xRz
- totale Relation $\leftrightarrow$ xRy $\vee$ yRx $\forall x, y \in A$

R heißt:

- Äquivalenzrelation $\leftrightarrow$ reflexiv, symmetrisch und transitiv
- Ordnung $\leftrightarrow$ reflexiv, antisymmetrisch und transitiv
- Totalordnung $\leftrightarrow$ Ordnung und total
- Quasiordnung $\leftrightarrow$ reflexiv und transitiv

## Partition/Klasse

Sei $C\wp(A)$. C heißt Partition/Klasse von A, falls gilt:

- $\bigcup C = A$ d.h. jedes $x \in A$ liegt in (min) einem $y \in C$
- $\emptyset \notin C$ d.h. jedes $y \in C$ enthält (min) ein Element von A
- $x \cap y = \emptyset$ f.a. $x \notin y$ aus C

## Ordnungen

Sei $leq$ eine Ordnung auf X. Sei $A \subseteq X, b \in X$

- b minimal in A $\leftrightarrow b \in A$ und $(c \leq b \rightarrow c = bf.a.c \in A)$
- b maximal in A $\leftrightarrow b \in A$ und $(b \leq c \rightarrow b = cf.a.c \in A)$
- b kleinstes Element in A $\leftrightarrow b \in A$ und $(b \leq cf.a.c \in A)$
- b größtes Element in A $\leftrightarrow b \in A$ und $(c \leq bf.a.c \in A)$
- b untere Schranke von A $\leftrightarrow b \leq cf.a.c \in A$
- b obere Schranke von A $\leftrightarrow c \leq bf.a.c \in A$
- b kleinste obere Schranke $\leftrightarrow$ kleinstes Element von obere Schranke; Supremum $\vee A = b$
- b größte untere Schranke $\leftrightarrow$ größte Element von untere Schranke; Infinum $\wedge A = b$

## Induktion I

Sei $p(n) \in \mathbb{N}$. Gelte $p(0)$ und $p(n) \rightarrow p(n^+)$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ dann ist $p(n)$ wahr f.a. $n \in \mathbb{N}$.

## Induktion II

Sei $p(n) \in \mathbb{N}$, gelte $\{\forall x < n : p(x)\} \rightarrow p(n)$ f.a. $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $p(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

# Funktionen

Eine Relation $f \subseteq AxB$ heißt Funktion $f : A \rightarrow B$ falls es zu jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ mit $(x, y) \in f$ gibt.

- injektiv $\leftrightarrow$ jedes y aus B hat höchstens ein Urbild $f(x) = f(y) \rightarrow x = y$
- subjektiv $\leftrightarrow$ jedes y aus B hat wenigstens ein Urbild $f(x) = y$
- bijektiv $\leftrightarrow$ jedes y aus B hat genau ein Urbild; injektiv und surjektiv

ist $f : A \rightarrow B$ bijektiv, so ist $f^{-1}$ eine Funktion B nach A und gleichmächtig.

# Gruppen, Ringe, Körper

Eine Menge G mit einer Operation $\circ$ auf G heißt Gruppe, falls gilt:

- $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ freie Auswertungsfolge
- es gibt ein neutrales Element $e \in G$ mit $a \circ e = a$ und $e \circ a = a$ f.a. $a \in G$
- $\forall a \in G \exists b \in G : \{a \circ b = e\} \vee \{b \circ a = e\}; b = a^{-1}$

kommutativ/abelsch, falls neben obigen gilt:

- $a \circ b = b \circ a$ f.a. $a, b \in G$

Zwei Gruppen $(G, \circ_G)$ und $(H, \circ_H)$ heißen isomorph, falls es einen Isomorphismus $(G, \circ_G) \cong (H, \circ_H)$ von $(G, \circ_G)$ nach $(H, \circ_H)$ gibt.

## Addition & Multiplikation

$+ : \mathbb{N}x\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ wird definiert durch:

- $m + 0 := m$ (0 ist neutral)
- $m + n$ sei schon definiert
- $m + n^+ := (m + n)^+$
- $m * 0 := 0$
- $m * n^+ = m * n + m$
- $[(a, b)]_{/\sim} + [(c, d)]_{/\sim} = [(a + c, b + d)]_{/\sim}$
- $[(a, b)]_{/\sim} * [(c, d)]_{/\sim} = [(ac + bd, ad + bc)]_{/\sim}$

Ein Ring R ist eine Menge mit zwei Operationen $+, * : \mathbb{R}x\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit:

- $a + (b + c) = (a + b) + c$ f.a. $a, b, c \in \mathbb{R}$
- Es gibt ein neutrales Element $O \in \mathbb{R}$ mit $O + a = a + O = O$
- zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein $-a \in \mathbb{R}$ mit $a + (-a) = -a + a = 0$
- $a + b = b + a$ f.a. $a, b \in \mathbb{R}$
- $a * (b * c) = (a * b) * c)$ f.a. $a, b, c \in \mathbb{R}$
- $a * (b + c) = a * b + a * c$ f.a. $a, b, c \in \mathbb{R}$
- heißt Ring mit 1, falls: es gibt ein $1 \in \mathbb{R}$ mit $a * 1 = 1 * a = a$
- heißt kommutativ, falls: $a * b = b * a$ f.a. $a, b \in \mathbb{R}$
- heißt Körper, falls: zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein $a^{-1} \in \mathbb{R}$ mit $a * a^{-1} = 1$
- Ist $\mathbb{R}$ ein Körper, so ist $\mathbb{R}* = \mathbb{R}/(0)$ mit $*$ eine abelsche Gruppe.
- $\mathbb{Z}$ mit + und * ist ein kommutativer Ring mit $1 \neq 0$ aber kein Körper
- $\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{R}$ mit + und * ist ein Körper

## Konstruktion von rationalen Zahlen

Definiere Operationen +,* auf $\mathbb{Q}$ wie folgt:

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{b*d}$ (wohldefiniert)
- $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a*c}{b*d}$

## Ring der formalen Potenzreihe

Sei k ein Körper. Eine Folge $(a_0, ..., a : n) \in K^{\mathbb{N}}$ mit Einträgen aus K heißt formale Potenzreihe $K[[x]]$.

- +: $(a_0, a_1, ...) + (b_0, b_1, ...) = (a_o + b_0, a_1 + b_1, ...)$
- *: $(a_0, a_1, ...) + (b_0, b_1, ...) = (c_0, c_1, ...)$ mit $c_K = \sum_{j=a}^{k} a_j * b_{k-j}$

# Wahrscheinlichkeit

Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Paar $(\Omega, p)$ aus einer endlichen Menge $\Omega$ und einer Funktion $p : \Omega \rightarrow [0, 1] \in \mathbb{R}$ Es gilt für Ereignisse $A, B, A_1, ..., A_k$:

- $A \subseteq B \rightarrow p(A) \leq p(B)$
- $p(A \cup B) \rightarrow p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- disjunkt($A_i \cap A_J = \emptyset$ für $i \neq j$) so gilt $p(A_1 \cup ... \cup A_k) = p(A_1) + ... + p(A_k)$
- $p(\Omega/A) :=$ Gegenereignis von $A = 1 - p(A)$
- $p(A_1, ..., A_k) \leq p(A_1) + ... + p(A_k)$
- (stochastisch) unabhängig, falls $p(A \cap B) = p(A) * p(B)$

## Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$A, B \subseteq \Omega$ für $p_B(A \cap B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} := p(A|B)$ Erwartungswert $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)p(\omega)$ Linearität von E: $E(x + y) = E(x) + E(y)$ und $E(\alpha x) = \alpha E(x)$ Varianz von X: $Var(X) = E((X^2) - E(X))^2)$ Covarianz: $Cov(X, Y) = E((X - E(X)) * (Y - E(Y)))$ Verschiebungssatz: $Cov(X, Y) = E(X * Y) - E(X) * E(Y)$ Bernoulliverteilt falls $p(X = 1) = p$ und $p(X = 0) = 1 - p$ Bernoulli $P = \binom{n}{k} * p^k * (1 - p)^{n-k}$ $\binom{N}{0} = (\emptyset), \binom{N}{n} = N, \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ $\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

## Hypergeometrische Verteilung

Beispiel: Urne mit zwei Sorten Kugeln; N Gesamtzahl der Kugeln, M Gesamtzahl Kugeln Sorte 1, N-M Gesamtzahl Kugeln Sorte 2, $n \leq N$ Anzahl Elemente einer Stichprobe. X Anzahl der Kugeln Sorte 1 in einer zufälligen n-elementigen Stichprobe.

$p(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ $E(X) = \sum_{x=0}^{M} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = n * \frac{M}{N}$
$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = n * \frac{M}{N}(1 - \frac{M}{N})\binom{N-n}{N-1}$

## Elementare Graphentheorie

$G = (V, E)$ heißt Graph mit Eckenmenge $V(G) = V$ und Kantenmenge $E(G) = E \subseteq x, y : x \neq y \in V$. Für $(a, b) \in V(G)$ heißt $d_G(a, b) = min(l :$ es gibt einen a,b-Weg der Länge l) Abstand von a nach b. G heißt zusammenhängend, wenn G höchstens eine Komponente besitzt.

- $d_G(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$
- $d_G(x, y) = d_G(y, x)$
- $d_G(x, z) \leq d_G(x, y) + d_G(y, z))$

Ein Graph ist ein Baum wenn "G ist minimal zusammenhängend und kreisfrei"

- G ist kreisfrei und zusammenhängend
- G kreisfrei und $|E(G)| = |V(G)| - 1$
- G zusammenhängend und $|E(G)| = |V(G)| - 1$

Breitensuchbaum von G falls $d_F(z, x) = d_G(z, x)$ f.a. $z \in V(G)$. Tiefensuchbaum von G falls für jede Kante zy gilt: z liegt auf dem y,x-Weg in T oder y liegt auf dem z,t-Weg in T.

**Spannbäume minimaler Gewichte** Sei G zuständiger Graph, $\omega : E(G) \to \mathbb{R}$; Setze $F = \emptyset$. Solange es eine Kante $e \in E(G)/F$ gibt so, dass $F \vee (e)$ kreisfrei ist, wähle e mit minimalem Gewicht $\omega(e)$, setzte $F = F \vee e$, iterieren. Das Verfahren endet mit einem Spannbaum $T = G(F)$ minimalen Gewichts.

**Das Traveling Salesman Problem** Konstruiere eine Folge$x_0, ..., x_m$ mit der Eigenschaft, dass jede Kante von T genau zweimal zum Übergang benutzt wird, d.h. zu $e \in E(T)$ existieren $i \neq j$ mit $e = x_i x_{i+1}$ und $e = x_j x_{j+1}$ und zu jedem k existieren $e \in E(T)$ mit $e = x_k x_{k+1}$. Das Gewicht dieser Folge sei $\sum \omega(x_i x_{i+1}) = 2\omega(T)$. Eliminiere Mehrfachnennungen in der Folge. Durch iteration erhält man einen aufspannenden Kreis mit $\omega(X) \leq 2\omega(T)$.

**Färbung & bipartit** Eine Funktion $f : V(G) \to C$ mit $|C| \leq k$ heißt k-Färbung, falls $f(x) \neq f(y)$ für $xy \in E(G)$. Ein Graph heißt bipartit mit den Klassen A,B falls $(x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in B \wedge y \in A)$. Mit Bipartitheit gilt G hat ein Matching von A $\leftrightarrow |N_G(X)| \leq |X|$ für alle $X \subseteq A$.