

## Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, P)$

- Ergebnis-/Grundraum  $\Omega$ , Menge aller Elementarereignisse
- Ergebnis/Ausgang  $\omega \in \Omega$
- Ereignis  $A \subseteq \Omega$
- Ereignisraum, die Menge aller Ereignisse,  $P(\Omega)$
- Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt:  $\Omega \supseteq A \rightarrow P(A) \in [0, 1]$
- $\sigma$ -Additivität:  $P(\cup_{k \in N} A_k) = \sum_{k \in N} P(A_k)$

## Ereignisalgebra

- mit  $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$
- Vereinigung:  $A \cup B = \{1, 2, 3\}$
- Durchschnitt:  $A \cap B = \{2\}$
- Gegenereignis:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}, \bar{A} = \{3, 4\}$
- Differenz  $A \setminus B = \{1\}$
- Symmetrische Differenz  $A \oplus B = \{1, 3\}$
- disjunkte (unvereinbar) Ereignisse  $A \cap B = \emptyset$

## Rechengesetze

- Kommutativ  $A \cup B = B \cup A$
- Assoziativ  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- Distributiv  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Absorption  $A \cap (A \cup B) = A$
- Idempotenz  $A \cap A = A$
- De-Morgan-Gesetz  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- Neutrale Elemente  $A \cap \Omega = A$
- Dominante Elemente  $A \cap \emptyset = \emptyset$
- Komplemente
  - $A \cap \bar{A} = \emptyset$
  - $\bar{A} \cup \bar{\bar{A}} = \Omega$
  - $\bar{\bar{A}} = A$

## Vierfeldertafel

Alle vier Felder zusammen entsprechen dem Ergebnisraum  $\Omega$

	$\Omega$	$B$	$\bar{B}$	
$A$	$A \cap B$	$A \cap \bar{B}$		
$\bar{A}$			$\bar{A} \cap \bar{B}$	
				1

## Absolute Häufigkeit

wie oft das Ereignis E innerhalb eines Zufallsexperiments, welches n-mal ausgeführt wird, aufgetreten ist. Die Summe der absoluten Häufigkeiten ergibt n. Bsp  $H_{20}(Kopf) = 8$

## Relative Häufigkeit

Tritt ein Ereignis E bei n Versuchen k-mal ein, so heißt die Zahl

$$h_n(E) = \frac{k}{n} = \frac{H_n(E)}{n}, \text{ Bsp: } h_{20}(Kopf) = \frac{8}{20} = 0,4$$

- die relative Häufigkeit nimmt Werte zwischen 0 und 1 an
- die relative Häufigkeit des sicheren Ereignisses ist 1  $h_n(\Omega) = 1$
- die relative Häufigkeit des unmöglichen Ereignisses ist 0
- $h_n(\bar{E}) = 1 - h_n(E)$
- $h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B) - h_n(A \cap B)$
- $H_n(E) = h_n(E) * n$

## Baumdiagramm

- (UND) Die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten des zugehörigen Pfades. Bsp:  $P(\{SS\}) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2}$
- (ODER) Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die zu diesem Ereignis führen. Bsp:  $P(\{SW, WS\}) = \frac{1}{2} * \frac{1}{3} + \frac{1}{3} * \frac{1}{2}$

## Kombinatorik

Kombinatorik	Wdh	Menge	Reihenfolge
Permutation	ohne	$n!$	n aus n beachtet
Permutation	mit	$\frac{n!}{k_1! * k_2! * \dots}$	n aus n beachtet
Variation	ohne	$\frac{n!}{(n-k)!}$	k aus n beachtet
Variation	mit	$\frac{n!}{k!}$	k aus n beachtet
Kombination	ohne	$\binom{n}{k}$	k aus n nein
Kombination	mit	$\binom{n+k-1}{k}$	k aus n nein

## Laplace Experiment

alle Elementarereignisse gleiche Wahrscheinlichkeit  $P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$   
 $\Omega$  endlich;  $P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} \rightarrow$  Laplace-Verteilung/diskrete Gleichverteilung

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl günstige Ausgänge}}{\text{Anzahl alle Ausgänge}}$$

Satz von de Moivre-Laplace: Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X gilt  $P(a \leq X \leq b) = \int_{a-0,5}^{b+0,5} \varphi_{\mu, \delta}(x) dx$  wobei  $\mu = n * p$  und  $\delta = \sqrt{n * p * (1-p)}$  ist.

## Stochastische Unabhängigkeit

Ereignisse sind stochastisch unabhängig, wenn das Eintreten eines Ereignisses das Eintreten des anderen Ereignisses nicht beeinflusst. Bsp:

- Ziehen mit Zurücklegen (unabhängig)
- Ziehen ohne Zurücklegen (abhängig)

also unabhängig, wenn gilt:  $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$ .  
 Bei stochastischer Unabhängigkeit zweier Ereignisse ist die Wahrscheinlichkeit eines Feldes in der Vierfeldertafel gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Zeile und zugehörigen Spalte.

## Multiplikationssatz

Die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten des zugehörigen Pfades. Bsp:  
 $P(A \cap B) = P(B) * P_B(A)$

## Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$  ist die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B.

## Totale Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die zu diesem Ereignis führen. Bsp:  
 $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) P(B_i)$   
 $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(B) * P_B(A) + P(\bar{B}) * P_{\bar{B}}(A)$

## Satz von Bayes

Umkehren von Schlussfolgerungen  $P_B(A) = \frac{P(A) * P_B(A)}{P(B)}$

## Diskrete Zufallsvariable

wenn sie nur endlich viele oder abzählbar unendlich viele Werte annimmt; meist durch einen Zählvorgang.

- Erwartungswert:  $\mu_x = E(X) = \sum_i x_i * P(X = x_i)$
- Varianz:  $\omega_x^2 = Var(X) = \sum_i (x_i - \mu_x)^2 * P(X = x_i)$
- Standardabweichung:  $\omega_x = \sqrt{Var(x)}$

## Stetige Zufallsvariable

wenn sie überabzählbar unendlich viele Werte annimmt; meist durch einen Messvorgang.

- Erwartungswert:  $\mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x) dx$
- Varianz:  $\omega_x^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 * f(x) dx$
- Standardabweichung:  $\omega_x = \sqrt{Var(X)}$

## Wahrscheinlichkeitsverteilung

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung gibt an, wie sich die Wahrscheinlichkeiten auf die möglichen Werte einer Zufallsvariablen verteilen. Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung lässt sich entweder

- durch die Verteilungsfunktion oder
- die Wahrscheinlichkeitsfunktion (bei diskreten Zufallsvariablen)
- bzw. die Dichtefunktion (bei stetigen Zufallsvariablen)

vollständig beschreiben.

## Wahrscheinlichkeitsfunktion

Eine Funktion f, die jedem x einer Zufallsvariablen X genau ein p aus  $[0; 1]$  zuordnet, heißt Wahrscheinlichkeitsfunktion. Kurz:  $f: x \rightarrow p$

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} p_i & \text{für } x = x_i (i = 1, 2, \dots, n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die Summe der Wahrscheinlichkeiten gilt  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

## Dichtefunktion

zur Beschreibung einer stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung

- kann nur positive Werte annehmen.  $f(x) \geq 0$
- Fläche unter der Dichtefunktion hat den Inhalt 1

Die Verteilungsfunktion ergibt sich durch Integration der Dichtefunktion:  
 $F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$

## Verteilungsfunktion

Eine Funktion F, die jedem x einer Zufallsvariablen X genau eine Wahrscheinlichkeit  $P(X \leq x)$  zuordnet, heißt Verteilungsfunktion:  $F: x \rightarrow P(X \leq x)$ .  $P(X \leq x)$  gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die Zufallsvariable X höchstens den Wert x annimmt.

- die Verteilungsfunktion F ist eine Treppenfunktion
- $F(x)$  ist monoton steigend
- $F(x)$  ist rechtssteitig stetig
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

## Diskrete Verteilungsfunktionen

- $P(X \leq a) = F(a)$
- $P(X < a) = F(a) - P(X = a)$
- $P(X > a) = 1 - F(a)$
- $P(X \geq a) = 1 - F(a) + P(X = a)$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = a)$
- $P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b)$
- $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) + P(X = a) - P(X = b)$

## Stetige Verteilungsfunktion

- $P(X = x) = 0$
- $P(X \leq a) = F(a)$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
- $P(X > a) = 1 - F(a)$

diskret	stetig
Binomialverteilung	Normalverteilung
Hypergeometrische Verteilung	Stetige Gleichverteilung
Poisson Verteilung	Exponentialverteilung

## Erwartungswert

zentrale Lage einer Verteilung

- diskret:  $\mu_x = E(X) = \sum_i x_i * P(X = x_i)$
- stetig:  $\mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x) dx$

## Varianz

erwartete quadratische Abweichung vom Erwartungswert.

- diskret:  $\delta_x^2 = Var(X) = \sum_i (x_i - \mu_x)^2 * P(X = x_i)$
- stetig:  $\delta_x^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 * f(x) dx$

Verschiebungssatz:  $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

## Standardabweichung

erwartete Abweichung vom Erwartungswert  $\delta_x = \sqrt{Var(X)}$

# Deskriptive Statistik

Die Menge aller Elemente, auf die ein Untersuchungsziel in der Statistik gerichtet ist, heißt Grundgesamtheit. Eine Datenerhebung der Grundgesamtheit nennt man Vollerhebung, wohingegen man eine Datenerhebung einer Stichprobe als Stichprobenerhebung bezeichnet. Die in einer Stichprobe beobachteten Werte heißen Stichprobenwerte oder Beobachtungswerte.

## Merkmale

Eigenschaften, die bei einer Datenerhebung untersucht werden

- Qualitative Merkmale lassen sich artmäßig erfassen
  - nominale Merkmale (Bsp. Geschlecht): Einzelne Ausprägungen des Merkmals lassen sich feststellen und willkürlich nebeneinander aufreihen. Es lässt sich keine Aussage über eine Reihenfolge oder über Abstände einzelner Ausprägungen machen.
  - ordinale Merkmale (Bsp. Schulnoten): Einzelne Merkmale lassen sich zwar nicht im üblichen Sinne messen, wohl aber in eine Reihenfolge bringen. Eine Aussage über den Abstand der Ränge lässt sich dagegen nicht machen.
- Quantitative Merkmale lassen sich zahlenmäßig erfassen
  - diskrete Merkmale (Bsp. Schülerzahl): Es gibt nur bestimmte Ausprägungen, die sich abzählen lassen. Die Merkmalsausprägungen diskreter Merkmale sind also ganze, meist nichtnegative Zahlen.
  - stetige Merkmale (Bsp. Gewicht): Einzelne Ausprägungen eines Merkmals können jeden beliebigen Wert innerhalb eines gewissen Intervalls annehmen.

## Lageparameter

alle statistischen Maßzahlen zusammengefasst, die eine Aussage über die Lage einer Verteilung machen

- Arithmetisches Mittel  $x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n x_i$
- Geometrisches Mittel  $\bar{x}_{geom} = \sqrt[n]{x_1 * x_2 * \dots * x_n}$
- Harmonisches Mittel  $\bar{x}_{harm} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}$
- Median: Wert, welcher größer oder gleich 50% aller Werte ist
- Modus:  $\bar{x}_d =$  Häufigster Beobachtungswert

## Streuungsparameter

alle statistischen Maßzahlen zusammengefasst, die eine Aussage über die Verteilung von einzelnen Werten um den Mittelwert machen

- Spannweite:  $R = x_{max} - x_{min}$
- Interquartilsabstand:  $IQR = Q_{0,75} - Q_{0,25}$
- Mittlere absolute Abweichung:  $D = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n \|x_i - \bar{x}\|$
- $Q_{0,75}$  entspricht dem Wert, welcher  $\geq 75\%$  aller Werte ist
- $Q_{0,25}$  entspricht dem Wert, welcher  $\geq 25\%$  aller Werte ist

## Schätzer

Zusammenfassung gesammelter Stichprobe mit einer bestimmten Formel. Als Beispiele können wir die Schätzfunktionen für den Anteilswert p

betrachten - der Schätzer wird dann meist  $\hat{p}$  („p-Dach“) genannt:

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Beispiel Schätzer für Varianz  $\sigma^2$  in der Grundgesamtheit:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

## Schätzfunktionen für den Mittelwert

Der Erwartungswert  $\mu$  wird in der Regel mit dem arithmetischen Mittel der Stichprobe geschätzt:

- Schätzfunktion  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$
- Schätzwert  $\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

Ist die Verteilung symmetrisch, kann auch der Median der Stichprobe als Schätzwert für den Erwartungswert verwendet werden.

## Schätzfunktionen für die Varianz

- Schätzfunktion  $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$
- Schätzwert  $\hat{\sigma}^2 = s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

## Schätzfunktionen für den Anteilswert

- Schätzfunktion  $\hat{\pi} = \frac{X}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$
- Schätzwert  $\pi^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

## Gütekriterien

Eine erwartungstreue Schätzfunktion ist im Mittel gleich dem wahren Parameter  $\gamma$ :  $E(g_n) = \gamma$ .

Verzerrung eines Schätzers  $Bias(g_n) = E(g_n) - \gamma = E(g_n - \gamma)$

Mittl. quad. Fehler  $MSE(g_n) = E[(g_n - \gamma)^2] = (Bias(g_n))^2 + Var(g_n)$

	Dichtefunktion	Verteilungsfunktion	Erwartungswert	Varianz
Normalverteilung	$f(x) = \frac{1}{\sigma * \sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$	$F(x) = \frac{1}{1-\sigma * \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}(\frac{u-\mu}{\sigma})^2} du$	$E(Y) = \mu$	$Var(Y) = \sigma^2$
Stetige Verteilung	$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{für } x > b \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a < x < b \\ 1 & \text{für } x \geq b \end{cases}$	$E(X) = \frac{a+b}{2}$	$Var(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2$
Exponentialverteilung	$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{\mu}} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$	$E(X) = \frac{1}{\lambda}$	-
Binomialverteilung	$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	-	$E(X) = np$	$Var(X) = np(1-p)$
Geometrische Verteilung	$f(x) = (1-p)^{x-1} * p$	-	$E(X) = \frac{1}{p}$ bzw. $E(Y) = E(X) - 1 = \frac{1-p}{p}$	-
Hypergeometrische Verteilung	$f(x) = \frac{\binom{x}{x} * \binom{N-x}{w-x}}{\binom{N}{w}}$	-	-	-
Poisson-Verteilung	$f(x) = e^{-\lambda} * \frac{\lambda^x}{x!}$	-	$E(X) = \lambda$	$Var(X) = \lambda$
empirische Verteilung	$f(x) = \frac{1}{n}$	$P = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma x_i$	$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	$Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
Laplace Verteilung	$f(x) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{\ x-\mu\ }{\sigma}}$	-	-	-
Dirac Maß	-	$F(X) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x < b \\ 0 & \text{falls } b \leq x \end{cases}$	$E(X) = b$	$Var(X) = 0$

## Skalenniveaus

Skalen	diskret	qualitativ		für
Nominalskala		Y	Klassifikation, Kategorien	Geschlecht, Studiengang
Ordinalskala		Y	Rangordnung ist definiert	Schulnoten
Intervallskala			Rangordnung und Abstände sind definiert	Temperatur
Verhältnisskala			Rangordnung, Abstände und natürlicher Nullpunkt definiert	Gehalt, Gewicht
Absolutskala	Y	Y	Rangordnung, Abstände, natürlicher Nullpunkt und natürliche Einheiten	Anzahl Fachsemester