

Disclaimer

Aufgaben aus dieser Vorlage stammen aus der Vorlesung *Grundlagen und diskrete Strukturen* und wurden zu Übungszwecken verändert oder anders formuliert! Für die Korrektheit der Lösungen wird keine Gewähr gegeben.

Erlaubte Hilfsmittel: eine math. Formelsammlung/Nachschlagwerk, ein handbeschriebenes A4-Blatt mit Formeln und Ergebnissen aus der Vorlesung.

1. (a) Untersuche, welche der folgenden aussagenlogischen Ausdrücke logisch äquivalent sind. Begründe die Entscheidung.

$$\varphi = p \rightarrow (q \wedge \bar{r}), \psi = (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \bar{p}), y = (\bar{p} \vee q) \leftrightarrow r$$

Antwort:

p	q	r	$q \wedge \bar{r}$	$p \rightarrow (q \wedge \bar{r})$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

p	q	r	$p \rightarrow q$	$r \rightarrow \bar{p}$	$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \bar{p})$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

p	q	r	$\bar{p} \vee q$	$(\bar{p} \vee q) \leftrightarrow r$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	1
1	1	1	0	0

- (b) Negiere die Aussage: $\forall S \in \mathbb{R} \exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n > m \Rightarrow a_n > S$

Antwort: $\exists S \in \mathbb{R} \exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n > m \Rightarrow a_n < S$

- (c) Negiere die Aussage: „In jeder GudS-Klausur gibt es mindestens eine Aufgabe, die von niemandem richtig gelöst wird“

Antwort: „Es gibt eine GudS-Klausur in der jemand jede Aufgabe richtig löst.“

2. Es seien $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ zwei Funktionen. Auf der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen wird wie folgt eine Relation definiert: $a \sim b \leftrightarrow f(a) - f(b) = g(a) - g(b)$. Weise nach, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Für den konkreten Fall $f(x) = x^2 + 1$ und $g(x) = 2x$ bestimme man die Äquivalenzklasse $[2]_{\sim}$

Antwort:

3. (a) Bestimme mit Hilfe des euklidischen Algorithmus ganze Zahlen a, b , für die gilt $1 = a * 100 + b * 23$

Antwort: $ggT(a, b) = a * x + b * y$

$\downarrow: b_i \rightarrow a_{i+1}, r_i \rightarrow b_{i+1}$

$\uparrow: x_i = y_{i+1}, y_i = x_{i+1} - q_i * y_{i+1}$

i	a	b	q (Teiler)	r(est)	x	y	Nebenrechnung $\downarrow$	Nebenrechnung $\uparrow$
1	100	23	4	8	3	-13	$100 - 23 * 4 = 8$	$100 * 3 + 23 * (-1 - 4 * 3) = 300 - 299 = 1$
2	23	8	2	7	-1	3	$23 - 2 * 8 = 7$	$23 * -1 + 8 * (1 - 2 * (-1)) = 1$
3	8	7	1	1	1	-1	$8 - 1 * 7 = 1$	$8 * 1 + 7 * (0 - 1 * 1) = 1$
4	7	1	7	0	0	1	$7 - 7 * 1 = 0$	$7 * 0 + 1 * 1 = 1$

Lösung: $a = 3, b = -13$

- (b) Bestimme mit Hilfe des euklidischen Algorithmus ganze Zahlen a, b , für die gilt $1 = a * 23 + b * 17$

	i	a	b	q	r	x	y
	1	23	17	1	6	3	$-1 - 1 * 3 = -4$
Antwort:	2	17	6	2	5	-1	$1 - 2 * -1 = 3$
	3	6	5	1	1	1	$0 - 1 * 1 = -1$
	4	5	1	5	0	0	1
Lösung: $1 = -3 * 23 - 4 * 17 = 69 - 68 = 1$							

- (c) Untersuche, ob es ein multiplikativ inverses Element zu $\overline{23}$ in $\mathbb{Z}_{100}$ gibt und bestimme dieses gegebenenfalls. Gebe außerdem ein nicht invertierbares Element außer $\overline{0}$ in $\mathbb{Z}_{100}$ an.

Antwort: multiplikativ inverses: $a^{-1} * a = 1$

die multiplikative Gruppe $\mathbb{Z}_n^*$ besteht aus den Elementen von $\mathbb{Z}_n$ die teilerfremd zu n sind. Für jedes $a \in \mathbb{Z}_n^*$ gilt $\text{ggT}(a, n) = 1$ und lässt sich als $1 = a * x + n * y$ darstellen $\Rightarrow a^{-1} \equiv y \pmod{n}$

i	a	b	q	r	x	y
1	100	23	4	8	3	-13
2	23	8	2	7	-1	3
3	8	7	1	1	1	-1
4	7	1	7	0	0	1

$$1 = 100 * 3 - 23 * 13 \Rightarrow \overline{23} = -13 \pmod{100}$$

$$\text{Alternativ: } a^{-1} * a = 1 \rightarrow a^{-1} = 1 \setminus a \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{23}$$

4. Gegeben sei die Menge $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,3)} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. Zeige, dass G eine Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation ist. Rechengesetze der Matrizenmultiplikation dürfen vorausgesetzt werden. Ist die Gruppe kommutativ? (ohne Beweis)

Antwort:

5. Markus ist politikinteressiert und möchte gerne Bundeskanzler werden. Er überlegt aber noch welcher Partei er beitrifft. Er hat zwei Parteien A und B , die ihm gefallen, könnte aber auch eine eigene Partei C gründen. Die Chancen bei den nächsten Wahlen als Spitzenkandidat aufgestellt zu werden schätzt er auf 10% bei Partei A , auf 20% bei Partei B und 100% bei Partei C . Die Chance, dass die jeweilige Partei mit ihm an der Spitze die Wahl gewinnt liegt bei 60%, 45% bzw. 2%.

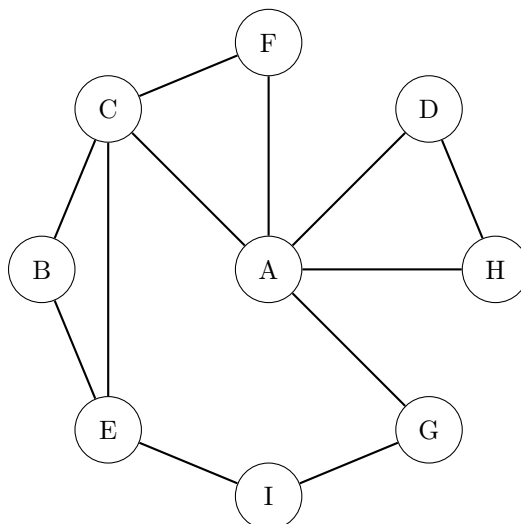
- (a) Für welche Partei sollte er sich entscheiden, um mit maximaler Wahrscheinlichkeit Bundeskanzler zu werden?

Antwort:

- (b) Markus lässt die Würfel entscheiden. Bei 1 tritt er Partei A bei, bei 2 oder 3 Partei B und bei 4, 5 oder 6 gründet er Partei C . Markus wird tatsächlich Bundeskanzler. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er dann Partei C gegründet.

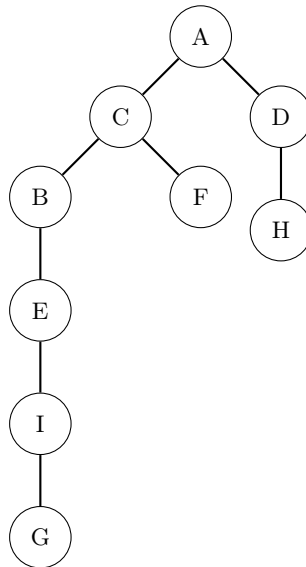
Antwort:

6. Gegeben sei folgender Graph:



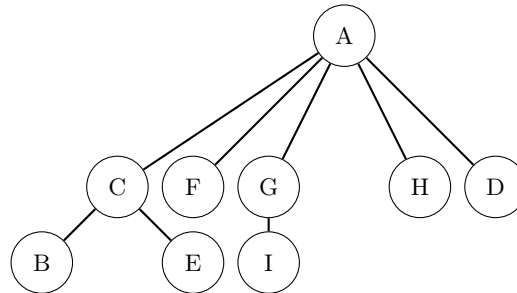
- (a) Gebe einen Tiefensuchbaum mit Startecke A für den Graphen an.

Antwort:



- (b) Gebe einen Breitensuchbaum mit Startecke A für den Graphen an.

Antwort:



- (c) Zeige, dass für jede natürliche Zahl $k \leq 1$ gilt: Jeder Baum, der eine Ecke vom Grad k enthält, hat mindestens k Blätter.

Antwort: