

Sensorik

Ein Sensor ist ein technisches Bauteil, das die physikalischen oder chemischen Eigenschaften erfassen und in ein elektronisches oder ein anderes geeignetes Signal umwandeln kann. Man unterscheidet zwischen aktiven und passiven Sensoren

Aktiv gibt Spannung/Strom ab, wobei er für Funktion Energie benötigt/umwandelt. wirkt wie elektrische Signalquelle

Passiv ändert elektrische Größen (z.B. Widerstand) ohne Energiezufuhr von außen

Auflösung von Sensoren:

temporal Zeitabstand zwischen Messungen (z.B. Aktionspotentiale)
spektral Abstand von Spektrallinien (z.B. Wärmebildkamera)
räumlich räumlicher Abstand (z.B. EEG, Ultraschall)
 ... Kombinationen (z.B. spatio-temporale Auflösung in Frequenzband)

Klassifikation nach Messgröße:

Physikalisch Kraft, Druck, Moment, Durchfluss
Elektrizität Potential, Strom, Impedanz
Magnetismus Fluss, Induktion
Optik/Licht spektrale Dämpfung, Extinktion
Chemisch Partialdruck von Gasen, Zucker, Hämoglobin
Akustik Herzschalltöne, Atmung
Temperatur Körpertemperatur

Druck, Dehnung und Kraft

Dehnmessstreifen (DMS)

- Messprinzip: Dehnungsabhängiger Widerstand
- Realisierung: Widerstandsdraht/Halbleiter Gitter auf Träger
- Messbare Größen: Kraft, Druck, Moment
- Anwendung: Atmungsdiagnostik, Fahrradergometer

Signaleigenschaften

- passiver Sensor - thermisches und/oder Halbleiter-Rauschen
- empfindlich gegen NF-elektrische/magnetische und HF-elektromagnetische Felder
- temperaturabhängig sind vor allem Halbleiter
- Übertragungseigenschaften abhängig von der Sensorkopplung
- Signaldynamik abhängig von Masse und Technologie

Grundlage ist der piezoresistive Widerstandseffekt

- $R = \rho \frac{l}{A} = \rho \frac{4l}{d^2 \pi}$, ρ Widerstand, l Länge, d Durchmesser
- $R + \delta R = (\rho + \delta \rho) \frac{4(l + \delta l)}{(d - \delta d)^2 \pi}$
- davon ist $(l + \delta l)$ relevant für die Dehnungsmessung
- Temp. linear abhängig von spez. Widerstand
- nicht linear abhängig von mechanischen Änderungen

- $\frac{\delta R}{R} = k \frac{\delta l}{l} = k * \epsilon$, ϵ -relative Dehnung
- $\epsilon = \frac{F}{EA}$, $F = \frac{\delta R}{R} * \frac{EA}{k}$, E-Elastizitätsmodul

Messverfahren: Widerstandsmessung mit Brückenschaltung

- Wheatstone'sche Brücke: $U_A \rightarrow 0 | R \Rightarrow \frac{R_x}{R_V} = \frac{R_2}{R_1}$
- $R_X = R_V \frac{R_2}{R_1}$

- Empfindlichkeit der Messanordnung höher als bei reinen Strom/Spannungsmessung
- Temperaturkompensation möglich
- Starkes Messsignal sinnvoll wegen Störungen vom Netz und Leitungen

Folien-DMS:

- Widerstandsdraht mit ca $20 \mu m$ Durchmesser oder Halbleiter
- Träger Acrylharz, Epoxydharz, Polyamid
- Dehnungsmessrosette: Messung in drei Richtungen

Bei massebezogener Messung - auch Single-End genannt - werden die Störungen direkt dem Messsignal überlagert, so dass später eine Trennung ohne aufwendige Signalverarbeitung kaum möglich ist. Einen großen Teil der Netzstörung bilden die elektrostatischen Felder, die Gleichtaktcharakter haben. Diese lassen sich also durch Differenzbildung (Wheatstonschen Brücke) zum Teil eliminieren.

Durchfluss, Volumen

Massendurchfluss

- $\dot{m} = \frac{dm}{dt}$
- $[\dot{m}] = \frac{kg}{h}$; $\frac{g}{s}$
- industriell relevant z.B. Kraftstoff, Luftverbrauch im Motor

Volumendurchfluss

- $\dot{V} = \frac{dV}{dt}$
- $[\dot{V}] = \frac{m^3}{h}$; $\frac{l}{min}$
- wichtige Messgröße: Blutfluss, Atmung, Gastrointestinalapparat

Bei bekannter durchflossener Fläche wird der Volumenfluss über die Geschwindigkeitsmessung ermittelt

- $\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{A * dl}{dt} = A * v$
- Reale Verteilung der Geschwindigkeit ist Parabel
- Gemessene Geschwindigkeit ist die mittlere Geschwindigkeit

Druckdifferentmessung nach Gesetz von Hagen-Poiseuille

- $\dot{V} = \frac{dV}{dt} \frac{\pi d^4}{128 \mu} * \frac{\delta p}{l}$
- d : Durchmesser Kapillare, l : Länge der Kapillare,
- $\delta p = p_A - p_B$: Druckdifferenz über Kapillare, μ - Viskosität

Anwendung in der Medizintechnik

- Messung aller vitaler Lungenvolumina
- Messung des Blutflusses

Nachteile des Messprinzips von Hagen-Poiseuille

- zusätzlicher Strömungswiderstand verfälscht das Ergebnis
- bei Temperaturunterschieden Kapillaren Tröpfchenbildung
- geringer Dynamikbereich (1:10)
- niedrige Messgenauigkeit wegen Turbulenzen an Kapillarenden
- direkter Kontakt mit Medium nötig

Ultraschall-Geschwindigkeitsmessung nach dem Laufzeitverfahren

- $v = \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} * \frac{L}{2 \cos \alpha}$
- v - mittlere Strömungsgeschwindigkeit des Mediums
- T_1 - Laufzeit mit der Strömung
- T_2 - Laufzeit gegen die Strömung
- L : Pfadlänge, α : Winkel Strömung-Pfad
- Vorteile
 - kein Kontakt mit dem Medium, insbesondere Blutbahnen
 - Installation und Messung ohne Unterbrechnung des Flusses
- Nachteile
 - invasive Methode, da Blutgefäß freigelegt werden muss
 - Ungenauigkeit wegen der Verformung der Blutgefäße
- Signaleigenschaften
 - verrauscht wegen Streuung im Medium, Sensorrauschen
 - Echo statisch verteilt wegen Geschwindigkeitsprofil

Ultraschall-Geschwindigkeitsmessung nach dem Dopplerverfahren

- $f_D = f \frac{c}{c-v} \Rightarrow v = c \frac{f-f_D}{f_D}$
- c - Ausbreitungsgeschwindigkeit
- f - Originalfrequenz Signalquelle
- f_D - gemessene Frequenz
- v - Geschwindigkeit Signalquelle
- Anm: Feste Blutbestandteile (Blutkörperchen) reflektieren die Schallwellen und sind somit für den Ultraschall-Empfänger bewegte Signalquellen

signalanalytisch relevante Eigenschaften

- Flussgeschwindigkeit ungleichmäßig verteilt
- im technischen Bereich konstruktiv beherrschbar
- im medizinischen Bereich kein Einfluss auf die Gefäße, daher relativ ungenaue Messung der mittleren Geschwindigkeit

Optische Sensoren

Kaltlichtquelle Endoskopie; bläuliches Tageslicht wegen Farbtreue
Diagnostische Laser Ophthalmologie, Urologie, Dermatologie
Leuchtdioden Photoplethysmographie (Pulsoximetrie)
Röntgen-/Gamma-/UV-/IR-Strahler diagnostische Bildgebung
Inspektionslicht in der HNO (Halogenstrahler)

Signalanalytisch wichtige Eigenschaften

Temperaturstrahler sind träge, daher statisches, konstantes Licht
Halbleiter (Leuchtdioden) Laser/Leuchtstoffröhren sind Gepulst

Optische Sensoren

Phototransistor in Flachbilddetektoren der Radiologie
Kamerachips in den Endoskopen
Scintillatoren in Gamma-Kameras
Photovervielfacher (SEV) in Laser-Fluoreszenzsystemen

Sensoreigenschaften

- starkes Eigenrauschen, typisch für Halbleiter, „Dunkelstrom“
- hohe Temperaturabhängigkeit, ist materialbedingt
- ungünstige Dynamikeigenschaften, Nachleuchten durch Trägheit
- lange Impulsantwort
- nicht invasiv, daher patientenfreundlich

Pulsoxymetrie: Signal am Photodetektor

- Multiplex bzw. sequentielle Abtastung
- Störung durch Rauschen und Umgebungslicht
- Nutzsignal im unteren Prozentbereich des Signals

Signal am Demultiplexer

- DC ca 95-98%
- AC nach DC Subtraktion verstärkt

Akustische Sensoren

Physiologischer Schall liegt im hörbaren Bereich. Konventionelle Mikrophontechnik mit spezifischer Signalverarbeitung

- Verstärkung im tieffrequenten Bereich mit linearer Phase
- Richtcharakteristik umschaltbar bzw. einstellbar
- spektrale Filterung für typische Geräusche, wie Herzklappen
- Merkmalerkennung in computerbasierter Auswertung
- Mustererkennung typischer pathologisch bedingter Geräusche

Ultraschall Methoden

CW (Continuous Wave) keine Tiefeninformation, Information über Dopplerfrequenz mit hoher Variationsbreite, stochastischer Charakter mit viel Rauschen
PW (pulsed Wave) Auflösung von der Signalverarbeitung abhängig, physikalische Grenzen erreicht
Doppler-Technologie CW/PW vereint, Summe aller Vor- und Nachteile

Sensoren für elektrische Größen
Elektrochemische Grundlagen

- Mensch produziert elektrische Signale, keine Umwandlung der Energieform notwendig
- Mensch ist Volumenteiler 2. Art - Elektrolyt oder Ionenleiter
- Messsystem mit metallischen Leitern aufgebaut - Leiter 1. Art, Elektronenleiter
- Schnittstelle notwendig -> Elektrode
- mM <=> mM+ + me-
- K+ A- <=> K+ + aA-
- <-: Reduktion; ->: Oxidation
- Dynamisches Gleichgewicht an den Phasengrenzen
- an Phasengrenze der Leitertypen Raumladungszone
- freie Elektronen im Metall und Kationen des Elektrolyts bilden Doppelschicht
- je nach chemischer Zusammensetzung des Elektrolyts und des Metalls unterschiedlich starke chemische Reaktionen

Elektroden der Diagnostik

- aus signalanalytischer Sicht: Eingangsdaten
- aus messtechnischer Sicht: Systemeingang

Ziele

- geringe Elektrodenspannung
- geringer Drift der Elektrodenspannung
- geringes Eigenrauschen

Realisierbarkeit

- Spannung durch Materialwahl (AgAgCl)
- Drift physiologisch bedingt, daher kaum beeinflussbar
- Eigenrauschen: Materialwahl und Technologie

Praktikabilität Elektroden

- EMG: Nadelform, aus Edelmetall, schlechte Signaleigenschaften, große Impedanz, kapazitives Verhalten, hohe Elektrodenspannung
- EKG: große Fläche, AgAgCl, niedrige Impedanz, tieffrequent, niedrige Elektrodenspannung

Elektroden der Therapie

- aus signalanalytischer Sicht: Ausgangsdaten
- aus messtechnischer Sicht: Systemausgang

Ziele

- geringe Impedanz
- geringer Drift der Impedanz
- Langzeitstabilität

Realisierbarkeit

- Impedanz durch Materialwahl (beschichtet Cu)
- Drift physiologisch bedingt
- Stabilität durch Materialwahl und Technologie

Sensoren für magnetische Größen

- vergleich mit natürlichen Erdfeld
- Störend technische M.Felder, z.B. Stromversorgungsnetz

- stärkstes Biosignal (MKG) 6 Dekaden unter Erdfeld (120dB)
- MEG -7 Dekaden oder 140dB,
- evozierte Felder -8 Dekaden oder 160dB

- 10^0 T: MR-Tomographie-Magnete
- 10^-5 T: Erdfeld
- 10^-6 T: Zivilisationsfelder (Rauschen)
- 10^-15 T: SQUID System Rauschen

Biomagnetische Signale sind sehr schwach (SNR < -120dB). Mehrere Maßnahmen zur SNR-Anhebung notwendig

- Abschirmung des Messkreises gegen Störfelder
- Ausnutzung der Feldeigenschaften - Gradiometer
- Spezialtechnologie der Signalverstärker - SQUID

Gradiometer

- Störfelder ferne Quellen, Biologische Strukturen nahe Quellen
- ferne Quellen produzieren annähernd homogenes Feld
- nahe Quellen produzieren inhomogenes Feld
- Gradiometer 1./2. räumliche Ableitung, dadurch homogenes Störfeld unterdrücken

Supraleitende Quanteninterferenzgerät (SQUID)

- aus zwei Supraleitern, durch dünne Isolierschichten getrennt und bildet zwei parallele Josephson-Kontakte
- erkennt unglaublich kleine Magnetfelder
- zur Messung der Magnetfelder in Mäusenirnen verwendet

Verstärkung und analoge Filterung

Entstehung der Biosignale, biologische Signalquellen

- Neuronausgang: Axon, Aktionspotentiale
- Neuroneingang: Synapsen, exzitatorische/inhibitorische postsynaptische Potentiale
- Sensorisches System deutlich komplexer
- Signalanalytisches Grundelement ist Aktionspotential (AP)

EEG in fünf Bereiche unterteilt:

0-4 Hz	4-7 Hz	8-13 Hz	13-30 Hz	>30 Hz
Delta	Theta	Alpha	Beta	Gamma

Biologische und technische Störquellen

- (quasi-)periodisch: geringes Problem, spektrale Filter
- transient: unbekannter, einmaliger, nicht reproduzierbarer Verlauf

periodische	transiente
öffentliches Stromversorgungsnetz	Spannungsspitzen im Netz
Straßenbahn	Bewegungen im Messbereich
Rotierende Maschinen	Schaltvorgänge
Kommunikationsnetze	Lastschwankungen

Störquellen

- periodische Netzstörung im 50Hz Bereich -> digitaler Filter
- transiente Bewegungsartefakte -> langsame A. durch Hochpass
- Maximal f0,01 = 0,5 Hz Patienten-Monitor EKG
- Maximal f0,02 = 0,05 Hz Diagnostischer Monitor bei EKG
- Biologische Störquellen lassen sich nicht abschalten/kaum unterdrücken

Ob Biosignal gewollt oder Störung, ist von Messaufgabe abhängig:

- soll das EKG gemessen werden, ist das EMG eine Störung
- soll das EEG gemessen werden, ist das EKG eine Störung
- soll das EOG gemessen werden, ist das EEG eine Störung

Eigenschaften technischer Störungen

periodische Störungen	transiente Störungen
NF-magnetische Felder nicht eliminierbar durch Schirmung, erzeugen Differenzspannung	kaum eliminierbar, Signalform unbekannt/nicht reproduzierbar
NF-elektrische Felder gut beherrschbar, erzeugen Gleichtaktstörungen	bestenfalls Detektion möglich, Messdaten nicht korrigierbar
HF-Felder immer mehr vorhanden (Kommunikation), Abschirmung unwirtschaftlich	

Eigenschaften biologischer Störungen

- Spektral alle Biosignale im selben Band (0-100Hz)
- Nichtlineare Verkopplung der Biosignale verhindern Trennung mit herkömmlichen Methoden
- Kein Biosignal deterministisch und reproduzierbar
- Transiente/aperiodische, stationäre Biosignale nicht qualifizierbar
- Trennung kaum möglich, bestenfalls Reduktion/Abschwächung
- Problem: funktionelle Verkopplung/Überlagerung im Mensch

Medizinische Messverstärker

Messverstärker Anforderungen

- Linearität im Arbeitsbereich
- statische Linearität des Verstärkers
- statische Beziehung zw Aus-/Eingangsspannung
- Linearer Phasenfrequenzgang: Erhaltung der Signalform bei Verstärkung
- Geringes Eigenrauschen des Messverstärkers
- Hohe Gleichtaktunterdrückung, nicht unter 100dB
- Übersteuerungsfestigkeit (100V Defi, 100W HF-Leistung)

Arbeitsbereich

- Pegel der Biosignale gut bekannt
- EKG zwischen +/- 5 mV
- Reserve bis Begrenzung ungefähr 50% des Arbeitsbereichs

Eigenrauschen

- Halbleiterrauschen bei 10Hz weißes (Widerstands-) Rauschen
- Schaltungsentwurf auf Minimierung des Rauschens beschränken
- Auswahl an guten Halbleitern sehr begrenzt
- Herstellerangaben teils beschönigt

Frequenzgang

- Linearer Phasenfrequenzgang: Keine Formverzerrung
- Signalform darf nicht verfälscht werden
- deshalb Gruppenlaufzeit konstant d(f) = const.
- > Phasenfrequenzgang: phi(f) = integral d(f)df = phi0 + f

Differenzverstärker

Vollkommene Symmetrie (DV und Signalanbindung)

- Störsignale an Eingängen Phasen/Pegel-gleich -> Gleichtaktsignal
- Signalquelle erzeugt Differenzspannung
- Verstärker ist ideal symmetrisch (identische Transistoren/R)
- Einkopplung der Gleichtaktstörung ideal symmetrisch über R

Symmetrie im DV, asymmetrische (realistische) Signalanbindung

- Einkopplung der Gleichtaktstörung immer unsymmetrisch
- unmöglich, im Messkreis Symmetrie herzustellen
- Gleichtaktanteil der Störung unterdrückt aber zur Differenz gewordene Anteil am Ausgang besteht

Differenz- und Gleichtaktverhalten

- SNR_in = (U_d_in / U_g_in) * (1mV / 10V) = 10^-4 approx -80dB
- V_g: Gleichtaktstörung (Netz), V_d: Nutzsignal (EKG)
- meistens als integrierte analoge Schaltungen mit OPVs eingesetzt
- Ausgang massefrei, daher zweite Stufe zur Differenzbildung (IC3) zu Ausgang massebezogene Spannung
- Anordnung ist Instrumentationsverstärker (instrumentation amplifier)
- Eingang (realistisch) Signalepegel von 1mV (EKG), Netzstörung 10V, SNR sehr niedrig, -80dB
- CMRR = (U_d_out / U_g_out) * (U_g_in / U_d_in) = (200mV / 20mV) * (10V / 1mV) = 10^5 approx 100dB
- CMRR: Common-Mode Rejection Ratio, Gleichtaktunterdrückung
- mit Ausgangssignal des Verstärkers -> Spektralanalyse
- Netzstörung am Ausgang 20mV, gewünschte Signal 200mV, SNR am Ausgang ist 10/20dB

Instrumentationsverstärker

mehrstufiger Verstärker, mit hohem Eingangswiderstand ($>100 \text{ MOhm}$) und hoher CMRR ($>100\text{dB}$)

Mehrstufiger Verstärker

- erste Stufe ist Eingangs-Differenzverstärker mit massefreiem Ausgang
- zweite Stufe verstärkt zusätzlich und bezieht die verstärkte Spannung auf Masse, so dass am Ausgang massebezogene, verstärkte Eingangs-Differenz vorliegt
- V1: $u_{ad} = A * u_{ed} + B * u_{eg}$, $u_{ag} = C * u_{eg} + D + u_{ed}$,
 - $A/B = F$: Diskriminationsfaktor
 - $A/C = H$: Rejektionsfaktor
- V2: $u_a = V_d u_{ed} + \frac{V_d}{CMR} u_{eg} = V_d (A u_{ed} + \frac{A}{F} u_{eg}) + \frac{V_d}{CMR} \frac{A}{H} u_{eg}$
 - $u_a|_{u_{ed}=0} = V_d A (\frac{1}{F} + \frac{1}{CMR \cdot H}) u_{eg}$
- Gesamt-Gleichtaktunterdrückung des mehrstufigen Verstärkers ist im wesentlichen abhängig von der ersten (Eingangs-)Stufe

Hoher Eingangswiderstand

- $R_{ed}^{(1)} = 2R_D + R_C \approx 2R_D$
- $R_{ed}^{(2)} = R_1 + R_3 \ll R_D$
- Eingangs-R der zweiten Stufe für Biosignale viel zu niedrig
- zusätzliche Stufe mit hohem Eingangs-R zur Verstärkung nötig

Hohe Gleichtaktunterdrückung

- Gute Eigenschaften nur mit integrierter Technologie und getrimmten Widerständen erreichbar
- ausschließlich integrierte IV eingesetzt (spezielle Ausnahmen)

Isolationsverstärker

- aus Sicherheitsgründen bzw. wegen zu hoher Spannungen
- Messkreis von Umgebung galvanisch zu trennen
- also bezugsfrei schweben zu lassen (floating circuit)

Funktionsprinzip

- alle Signalverbindungen und Stromversorgung werden getrennt
- optisch oder transformatorisch über Isolationsbarriere realisiert
- Biosignale sehr tieffrequent $\Rightarrow$ für Übertragung moduliert
- Hardwareaufwand steigt enorm $\Rightarrow$ integrierte Isolationsverstärker

Galvanische Trennung und ihre Auswirkung

- Patientensicherheit enorm verbessert
- Signaleigenschaften u.U. schlechter (Streukapazitäten)
- notwendiger Modem erzeugt weitere Störungen und Verzerrungen des gewünschten Signals

Guardingtechnik

Funktionsprinzip

- Abschirmung der Messkabel wirkungsvoll zur Störungsreduktion
- Schirm und Messkabel bilden relativ große Kapazität bis 100pF
- Impedanz der Kapazität parallel zum Eingangswiderstand des Verstärkers und reduziert diesen
- Eingangsspannung über Impedanzwandler an Schirm gelegt
- Schirmkapazität ist da aber keine Spannungsdifferenz mehr
- Impedanz der Kapazität dynamisch idealerweise beseitigt, theoretisch von Eingangsklemmen nicht sichtbar

Realisierung

- mit zusätzlichen OPV (IC4) im IV realisieren
- Kanäle nicht einzeln $\rightarrow$ alle mit Gleichtakt signal belegt
- spart Hardware und ist ausreichend
- kritisch ist Gleichtakt-Eingangswiderstand, der Differenz-Eingangswiderstand nicht

Aktive Elektroden

Funktionsprinzip

- Ansatz: Verstärkung und Digitalisierung direkt auf Elektrode
- Datenübertragung robust gegen Störungen, da binär
- Problem: Zuführung des Bezugspotentials notwendig

Störungsresistenz

- technologisch aufwendig aber Vorteile bei Störungen
- Elektrode: Drift der Polarisationsspannung kompensierbar
- Kabel: unempfindlich gegen kapazitiv, induktiv und HF-eingekoppelte Störungen
- Verstärkereingang: durch kürzeste Wege zum Sensor keine direkte Beeinträchtigung der Eingangskreise
- Unsymmetrie: lässt sich in Rückkopplung computergesteuert reduzieren bzw. eliminieren
- Übertragung digital $\rightarrow$ störungsresistent und distanzunabhängig

Gleichtaktunterdrückung: bei aktiven Elektroden Differenzierung

- Aktive Elektroden meistens mit Verstärkung $V = 1$
- daher CMR rechnerisch gleich 1, theoretisch zu niedrig
- prinzipbedingt starke Unterdrückung der Stör-Gleichtakt signale
- daher praktisch sehr gute CMRR von 100dB und mehr

Analoge Filter

Filter dem OV als Impedanzwandler folgt kein aktives Filter $\rightarrow$ passiv

Passive Filter

Grundlagen der Filtertheorie: spektrale Filtern verwenden folgende Parameter

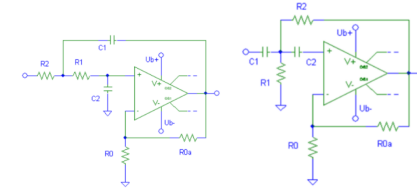
1. Eckfrequenz/Grenzfrequenz: F_{pass} der Durchlassbereich in die Filterflanke übergeht und Übertragung um $3\text{dB}/70\%$ vom Durchlassbereich abgesunken
2. Sperrfrequenz F_{stop} , Dämpfung im Sperrbereich erreicht
3. Übergangsbereich/Filterflanke $F_{stop} - F_{pass}$, Übergangsbereich vom Durchlass- in das Sperrband
4. Steilheit ist Maß für die Filterflanke in dB/Hz . steiler $\rightarrow$ besser
5. Welligkeit im Durchlassbereich A_{pass} , im welchen Bereich die Übertragung im Durchlassbereich schwankt
6. Minimale Dämpfung A_{stop} , die garantierte Dämpfung
7. $F_{s/2}$ ist halbe Abtast rate oder Nyquistfrequenz

- Übertragungsfunktion $G(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = |G(j\omega)| * e^{j\omega\phi}$
- Amplitudenfrequenzgang $|G(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}G(j\omega)^2 + \text{Im}G(j\omega)^2}$
- Phasenfrequenzgang $\phi(\omega) = \arctan \frac{\text{Im}G(j\omega)}{\text{Re}G(j\omega)}$
- Grenzfrequenz $\omega_g = \frac{1}{RC}$
- Filter üblich über Übertragungsfunktion beschrieben
- für BSA entscheidend Beschreibungen über Amplituden- und Phasenfrequenzgang

Filterentwurf passiver Bauelemente

- R,C,L, Quarzfilter
- mechanische Resonatoren
- akustische Oberflächenwellenfilter
- im spektralen Bereich der Biosignale ($0 \dots 1\text{kHz}$) nur R und C
- alternativ vor allem auf mechanischen/geometrischen Stabilität der schwingenden Anordnung aufbauend: piezokeramische, Quarzfilter, akustische OWF
- im Spektralbereich der Biosignale nur R-C-Kombinationen

Aktive Filter

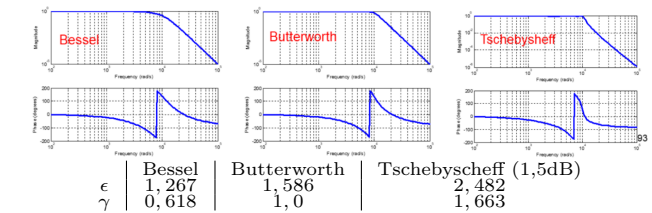


- links: Tiefpass; rechts: Hochpass
- $R_{0a} = (\epsilon - 1)R_0$, $u_a = \epsilon * u_e \Rightarrow$ Filtertyp mit R_0 einstellbar
- OV's ermöglichen definierte Gegenkopplung
- effektive, kleine (passiv komplizierte) Filter möglich
- am beliebtesten kaskadierte Stufe 2. Ordnung
- jede Stufe der Kask. verursacht 3dB -Abfall an Grenzfrequenz
- Filtertyp bequem durch Veränderung eines einzigen Widerstandes über alle drei Basischarakteristiken einstellbar
- die Basistypen sind

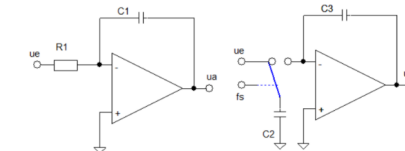
Bessel relativ flache Flanke, niedrigste Flankensteilheit, konstante Gruppenlaufzeit

Butterworth wenig Welligkeit im Durchlassbereich, steilere Flanke als Bessel

Tschebyscheff steilste Flanke und Welligkeit im Durchlassbereich



- Folgen nichtkonstanter Gruppenlaufzeit sind u.a. Formverzerrungen
- aktive Filter häufig vor AD-Wandler ($\tau = RC$)
- Alternativ Filter mit geschalteten Kapazitäten: An Stelle des Widerstandes am Eingang befindet sich eine Kapazität, die im Takt von f_s zwischen Eingang und dem OV umgeschaltet wird. Der mittlere Strom, der mit C_3 integriert wird, hängt also von der Schaltfrequenz und dem Kapazität C_2 ab. Daher ergibt sich die Zeitkonstante aus den beiden Kapazitäten, die auf dem Chip integriert sind und aus der Abtastfrequenz. Man kann also die Zeitkonstante allein durch Veränderung der Schaltfrequenz einstellen, ohne ein Bauelement der Schaltung ändern zu müssen. ($\tau = \frac{1}{f_s} * \frac{C_3}{C_2}$)



Linearer Phasenfrequenzgang

- Signalform der wichtigste Signalparameter
- Form der Biosignale ist diagnostisch relevant
- Formverzerrungen können zur falschen Diagnose führen
- notwendig, dass vom Messsystem nicht verzerrt
- konstante Gruppenlaufzeit Bedingung für Erhaltung der Signalform
- Konstante Gruppenlaufzeit heißt, dass alle spektralen Anteile des Signals im System um gleiche Zeit verzögert werden

- Ist Zeit nicht gleich, erscheinen z.B. höherfrequente Anteil am Ausgang später als niederfrequente
- EKG-Filterung mit Butterworth-Filter: nichtlinearer Phasenfrequenzgang, also nichtkonstante Gruppenlaufzeiten. Führen dazu, dass die hochfrequenten Anteile des QRS-Komplexes deutlich verspätet erscheinen, was in der Signalform schnelles Nachschwingen zur Folge hat
- Spektrogramm des Original-EKG zeigt typische Energieverteilung in der t-f-Ebene: Die P- und T-Welle liegen im tieffrequenten Bereich bis ca. 10Hz. Die R-Zacke ist deutlich kürzer und hat Impulscharakter, so dass sie spektral wesentlich breiter ist und höhere Frequenzen beinhaltet, hier bis 50Hz, ohne Filterung bis 100Hz.
- Spektrogramm des gefilterten Signals zeigt typischen Effekt nichtkonstanter Laufzeit: Die Frequenzen(-gruppen), die höher als ca. 20Hz liegen, werden deutlich verzögert und erzeugen das schnelle Nachschwingen.

Signalkonditionierung Pegelanpassung

Pegelanpassung notwendig für

- massebezogene Eingänge von ADC (+/- 1V... +/-10V)
- standardisierte Schnittstellen (0...1V, z.B. Schreiber)
- verkabelte Übertragung zur Zentrale (Elektrodenbrause bei EEG)

Realisierung mit

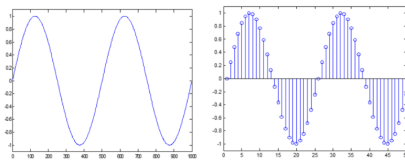
- Pegelschieber
- programmierbare Verstärker (integrierte analoge Elektronik)
- automatische Verstärkungsregelung (Rückkopplung)

massefreie und massebezogene Signale

- biologisches Objekt - Volumenleiter, immer kann nur Potentialdifferenz abgeleitet werden, d.h. massefrei (symmetrisch)
- bei Verstärkung, spätestens bei AD-Wandlung, Massebezug notwendig
- Wegen Störungen massefreie (symmetrische) analoge Strecke möglichst durchgängig bis zum ADC (verdrillte Leitungen, Differenzverstärker)

Abtastung, Aliasing

- Abtastung: Erfassung des momentanen Wertes eines Signals zu definierten Zeitpunkten
- Üblicherweise ist Signal zeitkontinuierlich, nach der Abtastung liegt eine zeitdiskrete Variante des Signals vor
- kontinuierliches Signal (links) vs. zeitdiskretes Signal (rechts)



Abtastung ist mathematisch eine Multiplikation des Signals mit einer Folge von Dirac-Pulsen: $y(t) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma(t - nT_A)$ (T_A ist die Abtastperiode)

Eine Multiplikation von zwei Signalen im Zeitbereich entspricht der Faltung ihrer Spektren im Frequenzbereich (und umgekehrt):

$$Y(\omega) = X(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma(\omega - n \frac{1}{T_A})$$

- EKG ist digitalisiert um es darstellen zu können
- stark instationäres Signal mit scharfer R-Zacke. Daraus ergibt sich ein periodisches Spektrum, da die R-Zacke einen nahezu impulsartigen Verlauf hat.

- Um Überlappung (Aliasing) der Spektren und Mehrdeutigkeiten zu vermeiden, muss gelten: $\frac{1}{T_A} \geq 2 * f_{max}$
- Nyquist-Frequenz entspricht der halben Grundfrequenz der Abtastrate, sie begrenzt nach oben das bei Null beginnende sog. Basisband.
- Basisband ist der Frequenzbereich, in dem man bei der Signalanalyse arbeitet
- damit gespiegelte Spektrum nicht bis ins Basisband reicht und dadurch das Vorhandensein real nichtexistenter Signalkomponenten vortäuscht, muss gewährleistet werden, dass die halbe AR höher liegt, als die höchste Frequenz des Signals, d.h. die AR muss mindestens doppelt so hoch sein, die die höchste vorhandene Frequenz
- periodische Wiederholung des Spektrums nach der Abtastung hat folgende praktische Bedeutung: Da sich das Spektrum mit jeder Harmonischen der AR wiederholt und gespiegelt wird, kann man ein bandbegrenztes Signal ins Basisband holen

Rekonstruktion

- nach der Abtastung/Signalverarbeitung Ergebnis oft im ursprünglichen Bereich des Signals benötigt
- Übertragung aus Analyse- in Originalbereich
- Interpolation zwischen diskreten Punkten notwendig oder aus Sicht der Filtertheorie die Anwendung eines Interpolationsfilters
- einfachste Interpolationsfilter ist Tiefpass in Nähe der höchsten Signalfrequenz. Wurde bei Abtastung das Abtasttheorem verletzt, treten im rekonstruierten Signal Komponenten auf, die im Originalsignal nicht vorhanden waren
- $y(t) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma(t - nT_A) \Leftrightarrow Y(\omega) = X(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma(\omega - n \frac{1}{T_A})$
- Übergang aus dem kontinuierlichen Zeitbereich in eine Folge, d.h. Entkopplung von der Abtastperiode
- $y(n) = y(nT_A) \Leftrightarrow Y(k) = Y(k\omega_A/M) = \sum_{n=1}^M y(nT_A) e^{-jkn/M}$
- $Y(K) \Leftrightarrow FFT(y(n)) \Rightarrow$ normierte Frequenz $\omega \in (0, 2\pi) \vee f \in (0, 1)$
- Nyquist Frequenz $\omega_N = \pi$, $f_N = 0,5$
- Nach Abtastung und Digitalisierung hat Signal Form einer Zahlenfolge/Vektors oder Matrix. Ist Abtastrate unbekannt, so ist Signal nicht mehr reproduzierbar
- Da Analysen/digitale Filterung grundsätzlich ohne Kenntnis der Abtastrate durchführbar, wird sog. normierte Frequenz eingeführt, die bei Rekonstruktion durch reale Abtastrate ersetzt

Abtasttheorem Kotelnikov, Channon ($T_A = 1/2f_{max}$)

- hinreichend aber nicht notwendig $AR \geq 22kps$
- $Y(\omega) = X(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma(\omega - n \frac{1}{T_A})$
- notwendig und hinreichend: $AR \geq 2kps$
- höchste Frequenz im Signal 11kHz $\rightarrow$ Abtastrate mind. 22kps.
- hinreichende, aber keine notwendige Bedingung
- bezieht man sich auf Wiederholung des Spektrums um jede Harmonische der Abtastrate, wird eine AR von 2kps ausreichen. Damit passt eine Wiederholung des Spektrums in das Basisband

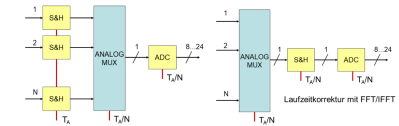
Pulsamplitudenmodulation (PAM)

- nach Sample & Hold: Zeit diskret, Pegel analog
- Abtastung entspricht nachrichtentechnisch der PAM: Werte treten in definierten Abständen entsprechend dem Pulsbreite (Abtastperiode) auf und haben kontinuierlichen Wertebereich
- spielt in der Nachrichtentechnik keine praktische Rolle, wichtig für Theorie

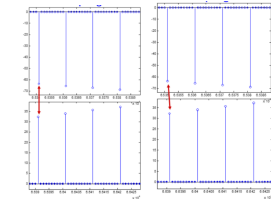
Mehrkanalsystem - Simultansampling

- Oft mehrkanalige Messsysteme benötigt
- Für Analyse entscheidend, dass zeitlicher Zusammenhang der Kanäle identisch oder bekannt

- Bei echtem Simultansampling werden alle Kanalsignale zum selben Zeitpunkt abgetastet und sequentiell digitalisiert. Im Normalfall reicht ein ADC für alle Kanäle
- HW-Aufwand minimieren $\rightarrow$ Kanalsignale sequentiell abgetastet und digitalisiert
- Signalanalytisch problematisch: Aus Signalsequenz wird Simultansignal über Laufzeitkorrektur in der FFT zurückgerechnet. Bei zeitkritischen Vorgängen ist dies zu verwerfen, da die durch die sequentielle Abtastung verlorengegangenen Signaleile durch Rückrechnung nicht mehr zu retten sind
- parallele (links) vs sequentielle (rechts) Abtastung



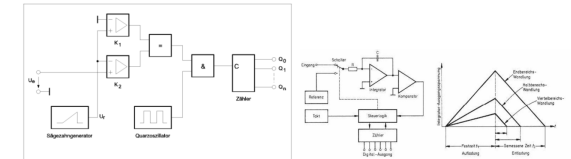
- simultan (links) vs versetzte (rechts) Kanäle



- Versatz der Kanäle um T_A/N
- Rechnerische Korrektur der Abtastzeit (nicht-online-fähig) $X^*(j\omega) = X(j\omega) e^{j\omega T_A/N}$

Digitalisierung Prinzipien der AD Wandlung

Einrampen- (links) vs Zweirampenverfahren (rechts)



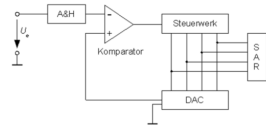
Einrampenverfahren, Single-Slope-Conversion

- U_r steigt aus negativen Bereich, kreuzt die Null so wird K1 positiv. Da K2 positiv, U_r unterhalb von U_e , öffnet Äquivalenzgatter (=Tor) & Zähler beginnt zu zählen
- Erreicht U_r Pegel von U_e , wird K2 negativ/null (=schließt) und Tor geht zu, Zähler hört auf zu zählen. Erreichte Zählerstand ist proportional der Spannung U_e
- Vorteile: einfach, wenig Aufwand, relativ schnell
- Nachteil: stark temperaturabhängig (Zählgrenzen von Analogwerten bestimmt), Wandelzeit abhängig von der Eingangsspannung

Zweirampenverfahren, Dual-Slope-Conversion

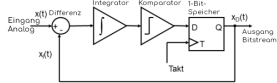
- Phase 1: Aufladung durch Eingangsspannung U_e über konstante Zeit. Damit ist integrierte Wert proportional zur U_e
- Phase 2: Entladung mit konstanter Referenzspannung U_r bis zum Erreichen von Null. Entladezeit proportional U_e . Entladezeit wird digital gezählt, damit ist Digitalwert am Ende proportional U_e
- Vorteil: Temperatureinfluss reduziert (gespiegelte analoge Integration), Fehlerquellen mit entgegengesetzten Vorzeichen (Auf- und Abintegrieren); Gute Genauigkeit bis 16 bit
- Nachteil: Wandlerzeit abhängig von U_e , daher nicht konstant

Sukzessive Approximation



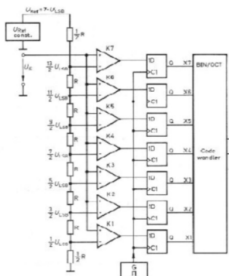
- DA-Wandlung mit vorgeschaltetem Komparator; DA-Wandler präziser herstellbar als herkömmliche ADC
- Prinzip: Steuerwerk beginnt mit MSB und schaltet Bits bis LSB um, bis beste Approximation von U_e erreicht
- Ablauf: ist bei $MSB = 1$ DAC-Spannung höher als U_e → $MSB = 0$, da Komparator anzeigt, dass DAC-Spannung zu hoch. Ist bei $MSB - 1 = 1$ DAC-Spannung niedriger als U_e , bleibt $MSB - 1 = 1$ und nächstes Bit folgt. Sukzessive bis LSB nach bester Annäherung gesucht
- Vorteil: DAC technologisch präziser herstellbar als ADC, Konstante Wandlungszeit, planbar im Zeitregime, Gute Auflösung (bis 18bit), relativ schnell und preiswert

Delta-Sigma-Wandlung



- Ein-Bit-Wandler: Sobald Eingangssignal $x(t)$ aufintegrierte digitale Folge $xD(t)$ über/unterschreitet, wird Bit gesetzt/rückgesetzt
- das integrierte Binärsignal folgt Eingangssignal mit höchstens einer Schrittweite als Fehler
- Im Demodulator müssen die bei Modulation durchgeführten Schritte invertiert werden: Integrator im Modulator wirkt insgesamt wegen Rückführung differenzierend, im Demodulator muss integriert werden. Wegen Taktung muss im Demodulator Tiefpass folgen um Signal zu glätten
- Zwischen Modulator und Demodulator liegt Übertragungsstrecke. Unter linearer Annahme, kann Integration vom Demod zum Mod vor Summierer verlagert werden. Beide Integratoren zu einem hinter Summierer zusammengefasst. Es entsteht Delta-Sigma-Wandler (Differenz-Integration-1-Bit-Modulator).
- Durch Vorlagerung des Integrators reduziert sich Demodulator (signalanalytisch) auf Tiefpass
- erforderliche Taktrate aus gewünschter Auflösung. z.B. Abtastrate 44,1kHz → 16bit digitalisiert (Oversamplingrate von 200)

Flash-Converter, Parallelwandler



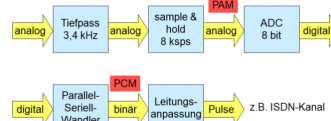
Am anderen Ende der Skala Flash-Converter: sind sehr schnell, arbeiten weit in Videobereich von über 100MHz hinein. Geht nur auf Kosten der Parallelität → für jede Quantisierungsstufe muss Komparator vorhanden sein. Für Bitbreite von 8bit werden 256 Komparatoren benötigt, ist integriert machbar aber Obergrenze.

Telemetrie Analoge Übertragung

- Direkt: verstärktes Signal auf kurze Entfernung
- Analoge Modulation über Kabel, z.B. EKG zu PC-Audiokarte
- Analoge Modulation kabellos, z.B. WLAN, Bluetooth, IR

- Prinzip: harmonischer Träger vom Modulationssignal beeinflusst, so dass momentane Amplitude dem Pegel des Modulationssignals entspricht
 - Mathematisch und bei tiefen Frequenzen einfach über Multiplikation des Trägers mit dem Modulationssignal realisierbar
 - im HF-Bereich über aufwendige Modulationsschaltungen und Leistungsverstärker
 - AM-Signal sehr störungsempfindlich, Störungen wirken direkt auf Amplitude und durch elektromagnetische Welle von Ausbreitungsbedingungen beeinflusst
 - niedrige Ansprüche: akustische Qualität akzeptabel z.B. Mittelwellen-/Kurzwellen-Funk
 - Messtechnik: AM kann in ersten Stufen eines mehrkanaligen Systems eingesetzt werden (Untermodulatoren), in dem keine Störungen von außen auftreten und welche notwendige Bandbreite sehr sparsam nutzen im Vergleich zur FM
- Spektrum des AM-Signals: notwendige Bandbreite doppelt so groß wie Modulationssignals EKG. Diese ließe sich nochmal halbieren, also auf die ursprüngliche Bandbreite reduzieren, da das informationstragende Spektrum im AM-Signal doppelt vorhanden ist, daher auch die Bezeichnung DSB (double side band). Würde man z.B. die linke Hälfte wegfildern, bliebe nur das eine zur Informationsübertragung notwendige Band übrig, daher die Bezeichnung SSB (single side band)
- Bei FM wird Trägerfrequenz moduliert, d.h. Momentanfrequenz des FM-Signals hängt vom aktuellen Pegel des Modulationssignals EKG ab. Die Amplitude des FM-Signals ist konstant, die Dichte der Nulldurchgänge nimmt mit dem Pegel des Modulationssignals zu. Die hohe Amplitude der R-Zacke erzeugt im FM-Signal hohe Frequenzen (zwischen ca. 15ms und 65ms), während links und rechts der R-Zacke sichtbar tiefere Frequenzen vorliegen
- FM besonders gut für Übertragungen kabelgebunden/kabellos (Band 433MHz) geeignet, da sehr unempfindlich gegen Amplitudenstörungen
- FM Nachteil ist sehr hohe erforderliche Bandbreite des FM-Signals: diese beträgt das 10 bis 20-fache der Bandbreite des Modulationssignals. Beim EKG können daher Bandbreiten von bis zu 20kHz notwendig sein. Spektrum erstreckt sich weit hinter Nyquistfrequenz (2000Hz), so dass es vor Abtastung mit einem Antialiasingtiefpass beschränken bzw. mit einer viel höheren Abtastrate abtasten müsste

Digitale Übertragung



binäre Übertragung, PCM

- PCM ist einfachste binäre Übertragung: nach Begrenzung des Spektrums bleibt ein Band von ca. 300 Hz bis 3.4 kHz
 - Nach Abtastung mit 8 kps liegt zeitdiskretes wertanaloges Signal vor, entspricht Puls-Amplituden-Modulation
 - Nach AD-Wandlung mit 8 bit und P/S-Wandlung liegt serielles, binäres Signal vor: das PCM-Signal
 - Das PCM-Signal wird über Leistungsverstärker und Leitungsanpassung auf Kabel gelegt
 - Nicht eingezeichnet ist Kompression, die Dynamik des Sprachsignals begrenzt und Reduktion der Bitbreite und Übertragungskapazität ermöglicht
- Zur Übertragung über (Telefon-)Kanäle ist es notwendig, die Pulse im Übertragungsband zur transportieren. Dazu werden logische Nullen und Einsen zwei verschiedenen Frequenzen zugeteilt, die im Sender und Empfänger gleich sind

- mehr Frequenzen möglich, z.B. mit 16 Frequenzen kann man direkt Hexadezimalzahlen übertragen

Klassifikation nach Impulsantwort als LTI-System (Linear Time Invariant)

- IIR: Infinite Impulse Response
 - Funktionales Äquivalent zu analogen Filtern
 - Im allg. nichtlinearer Phasenfrequenzgang
 - Durch rekursive Struktur ist Impulsantwort unendlich lang
 - IIR werden auf Grund ihrer Struktur auch Rekursivfilter genannt
 - unendlich langer Datenspeicher eines Zeitverlaufs realisierbar, denn der letzte Wert am Filterausgang reicht immer aus, um den Wert am Filtereingang zu berechnen
 - Problematisch ist i.A. nichtlineare Phasengang, der für Formanalyse unzulässig ist
- FIR: Finite Impulse Response
 - Filtertypen realisierbar, die es in der analogen Welt nicht gibt (Hilbert, Allpass, adaptive Filter)
 - Linearer Phasenfrequenzgang realisierbar
 - theoretisch unendlich lange IR, für realisierbarkeit nach bestimmter Länge abgeschnitten und damit endlich
 - in Form eines Koeffizientenvektors realisiert und daher als Transversalfilter bezeichnet
 - Typenbreite ungleich größer als bei IIR, da mit Filtertypen realisierbar, die es in der analogen Welt gar nicht gibt
 - mit Transversalstruktur ist Linearität des Phasenganges gewährleistet
 - im Vergleich zu IIR-Filtern haben FIR um Größenordnungen mehr Filterkoeffizienten

Digitale Filterung

IIR - Infinite Impulse Response

- $y(t) = g(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)x(t - \tau)d\tau$
- $Y(j\omega) = G(j\omega) * X(j\omega)$
- $g(t) = \frac{1}{\tau} \exp(-t/\tau)$
- $G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$
- Im analogen Zeitbereich ergibt sich der Filterausgang aus der Faltung der Impulsantwort mit dem Eingangssignal. Entsprechend der FT ist dies äquivalent der Multiplikation von Spektren im f-Bereich.
- Die Impulsantwort ist eine fallende e-Funktion, im f-Bereich ein T1-Glied.

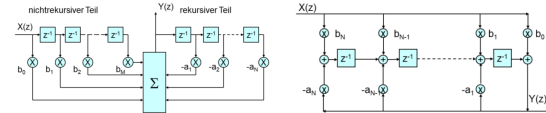
IIR-Filter

- zeitdiskret (nach Abtastung)
 - $g_a(t) = q_0(\delta(t) + q\delta(t - T) + q^2\delta(t - 2T) + \dots)$
 - $FT\{\delta(t - T)\} = e^{-j\omega T}$
 - $G_a(j\omega) = q_0(1 + qe^{-j\omega T} + q^2e^{-2j\omega T} \dots)$
 - $G_a(j\omega) = q_0 \frac{1}{1 - qe^{-j\omega T}}$
 - Z-Transformation $z = e^{j\omega T} \Rightarrow G(z) = q_0 \frac{1}{1 - qz^{-1}}$
 - Verzögerung um T_A
- Anlehnung an Impulsantwort-Invariant-Technik wird IR abgetastet → zeitdiskrete Version der IR, diese lässt sich als exponentielle Folge beschreiben
- FT der Zeitverschiebung ist bekannt → Äquivalent der Reihe im f-Bereich
- Über Näherungsrechnung geometrische Folge im f-Bereich zu einem Quotienten zusammenfassen
- z-Transformation: Übergang aus zeitanalogen in zeitdiskreten Bereich
- Exponent über z gibt Anzahl der Einheitsverzögerungen als Vielfaches der Abtastperiode an
- Filter der Ordnung N:

$$G(z) = \frac{k_1}{1 - q_1 z^{-1}} + \frac{k_2}{1 - q_2 z^{-1}} + \dots + \frac{k_N}{1 - q_N z^{-1}}$$

- gemeinsamer Nenner: $G(z) = \frac{b_0 + g_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$
- $Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \dots = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \dots$
- zeitkontinuierlich $y(t) + a_1 y(t - T) + \dots = b_0 x(t) + b_1 x(t - T) + \dots$
- Sequenz: $y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n - 1) + \dots - a_1 y(n - 1) - \dots$
- auf beliebiges Filter verallgemeinert: IIR allg. viel komplizierter als TP 1 Ordnung, lässt sich auf Summe von abklingenden e-Funktionen zurückführen
- Formel auf gemeinsamen Nenner → in Terme für Eingang x und Ausgang y trennen
- Rücktransformation in zeitanalogen Bereich zur Überprüfung der gewünschten Übertragungsfunktion
- Übertragung in zeitdiskreten Bereich → Rekursionsformel für Ausgang $y(n)$

IIR-Filter rekursiv



- links: $y(n) = \sum_{i=0}^N b_i x(n - i) - \sum_{i=1}^N N a_i y(n - i)$
- rechts: $y(n) = \sum_{i=0}^N b_i x(n - i) - \sum_{i=1}^N a_i y(n - i) = b_0 x(n) + \sum_{i=1}^N [b_i x(n - i) - a_i y(n - i)]$

Entwurf eines IIR-Filters

1. Übertragungsfunktion $G(j\omega)$ des Analogfilters
2. Kontinuierliche Impulsantwort $g(t)$ des Analogfilters
3. abgetastete Impulsantwort $g(nT)$ aus Impulsantwort $g(t)$
4. aus Reihe für $g(nT)$ z-Übertragungsfunktion $G(z)$ des IIR
5. aus $G(z)$ durch Rücktransformation in Zeitbereich die Rekursionsformel für Ausgangssignal $y(n)$

Eigenschaften von IIR-Filtern

- aus analogen Filtern direkt herleiten (analoge „Prototypen“)
- dieselben analogen Filter im digitalen Bereich
- keinen linearen Phasenfrequenzgang
- Nullphase nur bei gespiegelter Filterung

FIR-Filter

- kein rekursiver Anteil: $G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1} = \frac{Y(z)}{X(z)}$
- zeitdiskrete Realisierung: $Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \dots$
- analoge Faltung: $y(t) = b_0 x(t) + b_1 x(t - T) + \dots$
- diskrete Faltung: $y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n - 1) + \dots$
- Filterkoeffizienten gleich der abgetasteten Impulsantwort: $g(t) = b_0 \delta(t) + b_1 \delta(t - T) + \dots + b_L \delta(t - NT)$
- $y(n) = \sum_{i=0}^N b_i x(n - i)$

Entwurf eines FIR-Filters

1. Definition des Frequenzgangs $G(j\omega)$ eines idealen analogen Filters
2. Berechnung der Impulsantwort $g(t)$ des analogen Filters
3. Abtastung der Impulsantwort $g(nT)$ des idealen FIR-Filters
4. Definition eines Fenstertyps (Rechteck, Hanning, Hamming) und Begrenzung der Impulsantwort $g(nT)$ durch Fenster
5. Verschiebung der Impulsantwort so, dass Filter kausal wird
6. Die Filterkoeffizienten b_i sind identisch mit den Werten der begrenzten und verschobenen Impulsantwort

Eigenschaften von FIR-Filtern

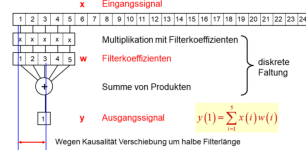
- kein analoges Gegenstück
- exklusive Übertragungsfunktion (Hilbert, Allpass)

- Länge und Koeffizienten völlig frei wählbar
- ideale Filter mit definierbarem Fehler realisierbar
- linear- und nullphasige Filter realisierbar
- Durch die Beschneidung der IR-Länge weicht Filtercharakteristik in Abhängigkeit von tatsächlichen Länge ab
- Gibb's Effekt: Je kürzer Impulsantwort abgeschnitten, umso mehr Gibb's-Effekt → Filtercharakteristik wird immer welliger. Im praktischen Einsatz weitgehend akzeptabel

Phasenfrequenzgang von FIR Filtern

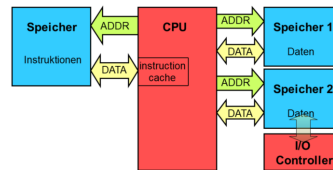
- ideale Phase identisch Null - nullphasiger Filter, nur off-line, kausales Filter um halbe Länge zeitverschoben
- konstante Gruppenlaufzeit - lineare Phase, on-line-fähig: $\phi(\omega) = -\omega\tau$
- definierter Phasenverlauf - Allpass
- In echtzeitfähiger Signalverarbeitung mit FIR beträgt die Gruppenlaufzeit die halbe Filterlänge unabhängig von Frequenz
- Gruppenlaufzeit: $\tau(\omega) = L T_A = 3 I T_A$
- Phasenfrequenzband: $\phi(\omega) = -2\pi * L T_A$

FIR Realisierung



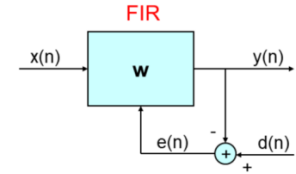
- FIR-Impulsantworten symmetrisch, während die eine Hälfte immer im zeitnegativen, also im nichtkausalen Bereich liegt
- diskrete Faltung ist Kern der DSP, da im Normalfall in Echtzeit gefiltert werden muss, welches Filter auch immer verwendet wird
- DSP oft on-chip Multiplikator und Addierer
- Ausgangssignal um Filterlänge-1 kürzer bei ungerader Anzahl der Filterkoeffizienten

DSP - Überblick über Architekturen



- Konventionelle CPU auf von Neumann-Architektur
- ein Speicher hardwaremäßig vorteilhaft; Überschreibungsprobleme
- Harvard-Architektur löst Überschreibungsproblem durch Trennung von Instruktionen und Daten in zwei Speichern. Außerdem erfolgen Zugriffe parallel → Geschwindigkeit enorm gesteigert
- Algorithmen der DSV häufig identisch → Abfolge der Instruktionen gut vorhergesagt → mehrere vorab in instruction cache der CPU befinden, dekodiert und in pipeline vorbereitet
- über I/O-Controller direkt vom Speicher Daten mit Außenwelt organisieren
- Tiger-Sharc-Architektur lagert Daten in zwei Speichern. Vorteil parallelen Zugriffs auf Instruktionen und zwei Datenblöcke → Rechengeschwindigkeit steigt enorm

Adaptive Filter



- FIR-Filterlänge = $2L + 1$
- Filterausgang: $y(n) = w(-L)x(n - L) + \dots + w(L)x(n + L) = \bar{x}^T \bar{w}$
- Modellfunktion, Sollsignal, desired response: $d(n)$
- Fehlersignal F, error: $e(n) = d(n) - y(n)$
- adaptive Filter ist Rückgekoppeltes System mit negativer Rückkopplung, so dass Stabilitätsbedingungen eingehalten werden
- einfache Variante: FIR mit Länge $2L + 1$
- Ausgang entspricht Faltung des Filtervektors mit Eingangssignal im Punkt n, jeweils L samples nach links und rechts bzw. nach oben und unten
- $d(n)$ ist regelungstechnisch Sollsignal oder analytisch Modell
- aus Differenz von $d(n)$ und $y(n)$ wird Errorsignal gebildet, das von Adaptionalgorithmus ausgewertet und Filterkoeffizienten vom Algorithmus so verändert, dass Fehler gegen Null konvergiert
- Errorsignal (spatial gültig): $e = d - y = d - \bar{x}^T \bar{w}$
- Quadrat des Errorsignals: $e^2 = d^2 - 2d\bar{x}^T \bar{w} + \bar{w}^T \bar{x} \bar{x}^T \bar{w}$
- Erwartungswert: $F = E\{e^2\} = E\{d^2\} - 2E\{d\bar{x}^T \bar{w}\} + E\{\bar{w}^T \bar{x} \bar{x}^T \bar{w}\}$
- Wiener Filter: $E\{d\bar{x}\} = \bar{w} E\{\bar{x} \bar{x}^T\}$

- $\bar{w} = R^{-1} * p$, R = Autokovarianzmatrix, p = Kreuzkovarianzvektor
- $W = \frac{p p^T}{p^T p}$, $p p^T$ = Kreuzleistungsdichte, $p p^T$ = Autoleistungsdichte

- Errorsignal ist Skalar aus Differenz $d(n)$ und Skalarprodukt des Eingangsvektors mit Filtervektor (Filterkoeffizienten)
- stationärer Fall der Signalstatistik → primär nicht Momentanwert des Errors Null, sondern seine Energie/Leistung. Dazu wird Error quadriert
- Erwartungswert des Fehlers (quadratisches Mittelwert) soll minimal werden, dann entspricht der Filterausgang der Modellfunktion
- Wiener/Optimalfilter: erste Ableitung des Fehlers nach Filterkoeffizienten und setzt diese gleich Null
- Wienerfilter im Originalbereich mit Hilfe von Auto- und Kreuzkovarianzen beschrieben
- oder im Spektralbereich mit Auto- und Kreuzleistungsdichte
- Schätzung des Fehlerquadrats: $E\{e^2\} \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M e_i^2$
- Schätzung der Autokorrelationsmatrix: $R = E\{x * x^T\} \approx \begin{pmatrix} x(0)x(0) & \dots & x(0)x(M-1) \\ x(M-1)x(0) & \dots & x(M-1)x(M-1) \end{pmatrix}$
- Schätzung des Kreuzkorrelationsvektors: $p = E\{d\bar{x}\} \approx dx$
- kontinuierliche Zeit

- Kreuzkorrelationsfunktion: $r_{xd}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(\tau) d(t + \tau) dt$
- Autokorrelationsfunktion: $r_{xx}(\tau) = r_{xd}(\tau)|_{d=x}$
- Kreuzleistungsdichte: $S_{xd}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xd}(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau$
- Autoleistungsdichte: $S_{xx}(f) = S_{xd}(f)|_{d=x}$

- diskrete Zeit
- Kreuzkorrelationsfunktion: $r_{xd}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(n) d(n + m)$
- Autokorrelationsfunktion: $r_{xx}(m) = r_{xd}(m)|_{d=x}$
- Kreuzleistungsdichte: $S_{xd}(k) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} r_{xd}(m) e^{-i2\pi k m}$
- Autoleistungsdichte: $S_{xx}(k) = S_{xd}(k)|_{d=x}$

Probleme bei der Realisierung des optimalen Filters

- Inverse Autokovarianzmatrix - rechentechnisches Problem
- Leistungsspektrum berechenbar aber nur im stationären Fall
- Warum unbekanntes Signal filtern, wenn gesuchte als Sollsinal bekannt
- Wiener Filter existiert nur theoretisch
- Wienerfilter realisieren in Praxis sehr schwierig. (inversen Autokovarianzmatrix)
- Leistungsspektrum gilt nur für stationären Fall, bei Biosignalen nicht annähernd
- Wienerfilter für Filtertheorie grundlegende Bedeutung und kann in modifizierten Varianten umgesetzt werden

Stochastischer Prozess: Ensemble, Sequenz von Zufallsvariablen

- $X = \{X(n-m), \dots, X(n), \dots, X(n+m)\}$
- Starke Stationarität: Verteilungen der Zufallsvariablen identisch
- Annahme der starken Stationarität für viele Methoden der Signalstatistik notwendig kann aber praktisch nicht erfüllt/geprüft werden

Schwache Stationarität

- $E\{x_t\} = \mu$, $var(x_t) < \infty$, $cov(x_{t1}, x_{t2})$
- Annahme der Gleichheit von Verteilungen der Zufallsgrößen nicht gefordert
- nur Momente erster und zweiter Ordnung müssen zeitlich konstant sein
- für signalanalytische Praxis oft zu wenig, da Momente dritter und vierter Ordnung nicht gleich sein müssen

Praktikable Koeffizientenberechnung - LMS

- alternativer Weg zum Fehlerminimum über Gradienten:

$$\Delta_j = \frac{\delta F(\bar{w})}{\delta \bar{w}} \bigg|_{w=w_j}$$
- Schätzung des Gradienten über aktuellen Wert:

$$\hat{\Delta}_j = \frac{\delta(e_j^2(\bar{w}))}{\delta \bar{w}} \bigg|_{w=w_j} = w e_j \frac{\delta e_j}{\delta \bar{w}} \bigg|_{w=w_j} = -2e_j \bar{x}_j$$
- Rekursionsformel für Filterkoeffizienten $\bar{w}_{j+1} = \bar{w}_j + 2\mu e_j \bar{x}_j$
- μ : Adoptionskonstante; $\lambda_{\{max\}}$: größter Eigenwert der Autokovarianzmatrix; $\frac{1}{\lambda_{max}} > \mu > 0$

- Obergrenze durch Signalenergie: $\frac{1}{\sum_{j=0}^N x^2(j)} > \mu > 0$
- Fehlerfunktion $F(w)$ ist $(2L+1)$ -dimensionale Parabel, deren Minimum der Optimallösung entspricht
- Weg zum Optimum über inverse Autokovarianzmatrix und Leistungsdichten verbaut, Näherung des Minimum der Parabel mit Hilfe des Gradienten iterativ
- Gradienten aus aktuellen Fehler schätzen, Mittelwertbildung weglassen, unter Annahme der Stationarität. Geschätzter Gradient aus Produkt des Fehlers und Eingangsvektors
- Gradienten nutzen, durch Adaptionkonstante bestimmten Schritten auf Minimum zu konvergieren
- Stabilitätsbedingung durch größten Eigenwert der Autokovarianzmatrix. In Praxis wird einfachere Signalenergie verwendet

Adaptiver Muster-Filter

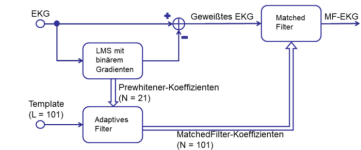
- $x(n)$: reales Signal, $e(n)$: Fehler, $y(n)$: Filterausgang
- $d(n)$: ungestörtes Muster (woher?)
- Funktion: Im Ausgang $y(n)$ erscheinen diejenigen Signalanteile von $x(n)$, die gut mit $d(n)$ korrelieren
- Im stationären Fall und nach erfolgter Konvergenz → Filterausgang enthält die Anteile von $x(n)$, die mit $d(n)$ gut korrelieren (nur wenn Mustersignal bekannt und vorgegeben)
- Fazit: nicht realisierbar/Sinnvoll, wenn Muster vorliegt

Adaptiver Noise Canceller - ein praktikables adaptives Filter

- $x(n)$: Rauschreferenz, $e(n)$: Signal, $y(n)$: Rauschen
- $d(n)$: Signal + Rauschen
- kein Mustersignal aber Rauschreferenz vorliegend
- Störung beseitigen, wenn diese bekannt
- Filteranschlüsse umfunktioniert: Filtereingang wird Rauschreferenz ohne Anteile des gewünschten Signals
- am Filterausgang, Störung=Signal das gut mit Primärsignal korreliert
- Am Filterausgang liegen die Signalanteile vom Filtereingang an, die gut mit dem Primäreingang korrelieren.
- Filter stellt sich relativ langsam auf Optimallösung ein, da stationärer Prozess und konvergiert auf Optimum mit Adaptionkonstante tau
- Lage für stationäre und korrelierende Störung ändert sich nicht

- Störung aus Errorsignal wie mit Referenz wegfiltern und übrig bleibt gewünschtes Signal
- funktioniert nur so lange, wie zeitverschobene Anteile des gewünschten Signals miteinander bei der konkreten Zeitverschiebung unkorreliert sind
- nicht immer möglich gute Verschiebung anzugeben; wird empirisch eingestellt

EKG mit MF (Matched Filter)



- In bestimmten Messsituationen (Ruhe EKG vor Ergometrie) liegt Musterfunktion/Template vor
- Für signalanalytische korrekte Detektion/Filterung müssen Signal (EKG) sowie Template (Muster) weißes Spektrum haben
- Zum Prewhitening wird LMS mit binärem Gradienten verwendet. Die selben Filterkoeffizienten filtern auch das Template für das MF
- Lineare Prädikation:

$$x_p[k] = a_1 x[k-1] + a_2 x[k-2] + \dots + a_n x[k-n]$$
- Residualfehler ist weiß: $x_{err}[k] = x[k] - x_p[k]$
- Robuster LMS mit binärem Gradienten:

$$w[k+1] = w[k] + \mu * sng(e[k]x[k])$$
- Da Biosignale relativ tieffrequente Signale sind (10-100 Hz), führt Prewhitening zur relativen Anhebung der hochfrequenten Anteile sowie breitbandigen Rauschens
- Wegen relativer Anhebung hochfrequenter Anteile haben Prewhitener implizit Hochpass-Charakter. Tieffrequenten Anteile („langsame Wellen“) nach Prewhitening deutlich reduziert
- Durch Prewhitening und nach MF ist Signalform des Biosignals zum Teil stark verändert ⇒ MF eignet sich nur zur Detektion von Biosignalkomponenten, nicht zur diagnostischen Kurvenvermessung
- MF ist empfindlichster und sicherster Detektor von bekannten Mustern