

## Disclaimer

Die Übungen die hier gezeigt werden stammen aus der Vorlesung *Logik und Logikprogrammierung!*  
Für die Richtigkeit der Lösungen wird keine Gewähr gegeben.

### Aufgabe 1

Emil hat seine Freunde Anne, Bernd, Christiane und Dirk auf eine Party eingeladen. Leider gibt es dabei einige Komplikationen.

1. Anne ist in Bernd verliebt und kommt nur mit, wenn Bernd auch kommt.
  2. Bernd ist jedoch in Christiane verliebt und kommt nur, wenn Christiane auch kommt.
  3. Zudem ist auch Dirk in Christiane verliebt und, falls Christiane kommt, kommt Dirk auch.
  4. Wenn Dirk mitkommt, wird er auf jeden Fall Anne oder Bernd mitbringen.
  5. Christiane ist die Situation peinlich und kommt, falls sowohl Bernd als auch Dirk mitkommen, nicht mit.
- (a) Formalisieren Sie die gegebenen Sachverhalte durch aussagenlogische Formeln. Hinweis: Die Motivationsgründe der einzelnen Personen können dabei vernachlässigt werden. Verwenden Sie die atomaren Formeln  $A$  für „Anne kommt mit“,  $B$  für „Bernd kommt mit“,  $C$  für „Christiane kommt mit“ und  $D$  für „Dirk kommt mit“.

#### Solution:

1.  $A \rightarrow B$
2.  $B \rightarrow C$
3.  $C \rightarrow D$
4.  $D \rightarrow (A \vee B)$
5.  $(B \wedge D) \rightarrow \neg C$

- (b) Argumentieren Sie, dass keiner der vier Freunde Emils zur Party mitkommt.

#### Solution:

Ziel:  $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D$

Es gilt:  $B \rightarrow D$ , da  $B \rightarrow C$  und  $C \rightarrow D$

Es gilt:  $D \rightarrow B$ , da  $D \rightarrow (A \vee B)$  und  $A \rightarrow B$

Es gilt:  $B \leftrightarrow D$ , da  $B \rightarrow D$  und  $D \rightarrow B$

Es gilt:  $C \rightarrow B$ , da  $C \rightarrow D$  und  $D \rightarrow B$

Es gilt:  $B \leftrightarrow C$ , da  $B \rightarrow C$  und  $C \rightarrow B$

Es gilt Äquivalenz:  $(\neg B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (B \wedge C \wedge D)$

Angenommen  $B \wedge C \wedge D$ , dann  $B \wedge D \Rightarrow \neg C$ , also  $\neg C$  und  $C$  !Widerspruch!

Es gilt:  $\neg A$ , da  $A \rightarrow B$  und  $\neg B$

Es gilt  $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D$

### Aufgabe 2

Sei  $P = \{p_1, \dots, p_k\}$  eine endliche, nicht-leere Menge atomarer Formeln. Wir können die Menge  $AL(P)$  der aussagenlogischen Formeln über den atomaren Formeln aus  $P$  als eine formale Sprache über dem Alphabet  $\Sigma = \{\perp, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, (, )\} \vee P$  auffassen.

- (a) Zeigen Sie, dass  $AL(P)$  nicht regulär ist.

**Solution:** Mit Satz von Myhill-Nerode: Betrachte Wörter  $v_n = [(P_n)]^n P_n$ . Für  $m \neq n$  sind  $v_m, v_n$  in verschiedenen MN-Äquivalenzklassen:  $v_m[I]^m \in AL(P)$  und  $v_n[I]^m \notin AL(P)$   
Also gibt es unendlich viele MN-Äquivalenzklassen und  $AL(P)$  ist nicht regulär

- (b) Zeigen Sie, dass  $AL(P)$  jedoch kontextfrei ist, indem Sie eine kontextfreie Grammatik angeben, die  $AL(P)$  erzeugt.

**Solution:**

$$G = (V, \Sigma, P, S)$$

$$S \rightarrow \perp | p_1 | \dots | p_k | \neg S | (S \wedge S) | (S \vee S) | (S \rightarrow S)$$

**Aufgabe 3** .....

Zeigen Sie per vollständiger Induktion über den Formelaufbau, dass in jeder Formel die Anzahl der öffnenden Klammern gleich der Anzahl der schließenden Klammern ist, d.h. zeigen Sie, dass für alle endlichen Mengen atomarer Formeln  $P = \{p_1, \dots, p_k\}$  und alle  $\phi \in AL(P)$ , dass  $|\phi|_{(} = |\phi|_{)}$  gilt.

**Solution:**

Induktion über Formelaufbau.

I.A.:  $E = \perp : |\perp|_{(} = 0 = |\perp|_{)}$ ,  $E = p_i : |p_i|_{(} = 0 = |p_i|_{)}$

I.V.: für  $E, \Phi \in AL(P)$  gilt  $|E|_{(} = |E|_{)}$ ,  $|\Phi|_{(} = |\Phi|_{)}$

I.S.:  $\neg E : |\neg E|_{(} = |\neg|_{(} + |E|_{(} = |\neg|_{(} + |E|_{)} = |E|_{)} = |\neg E|_{)}$

$(E \wedge \Phi) : |(E \wedge \Phi)|_{(} = |(|_{(} + |E|_{(} + | \wedge |_{(} + |\Phi|_{(} + |)|_{(} = 1 + |E|_{(} + |\Phi|_{(} + 0 = 1 + |E|_{)} + 0 + |\Phi|_{)} = |(|_{)} + |E|_{)} + | \wedge |_{)} + |\Phi|_{)} + |)|_{)} = |(E \wedge \Phi)|_{)}$

$(E \vee \Phi), (E \rightarrow \Phi)$  analog

**Aufgabe 4** .....

Seien  $\phi, \psi$  aussagenlogische Formeln. Wir sagen, dass  $\psi$  eine Teilformel von  $\phi$  ist wenn  $\phi$  (als syntaktisches Wort) ein Infix von  $\psi$  ist. Zum Beispiel ist  $p_1$  eine Teilformel von  $\neg(p_2 \wedge p_1)$ , nicht aber  $\neg($ , da dies keine aussagenlogische Formel ist. Sei  $TF(\phi)$  die Anzahl der Teilformeln von  $\phi$ . Zeigen Sie per vollständiger Induktion über den Formelaufbau, dass für jede aussagenlogische Formel  $\phi$  die Anzahl der Teilformeln von  $\phi$  kleiner gleich der Länge von  $\phi$  ist, also  $TF(\phi) \leq |\phi|$ .

**Solution:**

I.A.:  $E = \perp : TF(\perp) = 1 = |E|$ ,  $E = p_i : TF(p_i) = 1 = |E|$

I.V.: gelte für Formel  $E, \Psi$ , d.h.  $TF(E) \leq |E|$  und  $TF(\Psi) \leq |\Psi|$

I.S.:

- $\neg E : TF(\neg E) \leq 1 + TF(E) \leq 1 + |E| = |\neg E|$
- $(E \wedge \Psi) : TF(E \wedge \Psi) = 1 + TF(E) + TF(\Psi) \leq 1 + |E| + |\Psi| \leq 3 + |E| + |\Psi| = |(E \wedge \Psi)|$
- $(E \vee \Psi), (E \rightarrow \Psi)$  analog

Also folgt aus der vollständigen Induktion

**Aufgabe 5** .....

Vervollständigen Sie die folgende Deduktion um die angewendeten Regeln, gestrichenen Hypothesen und fehlenden Formeln. Markieren Sie zudem für alle gestrichenen Hypothesen, durch welche Regelanwendung diese gestrichen wurden.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\neg\phi \wedge \neg\psi}{?} (\wedge E_1) \quad \phi}{?} (\neg E) \quad \frac{\frac{\neg\phi \wedge \neg\psi}{?} (\wedge E_2) \quad \psi}{?} (\neg E)}{\frac{\phi \vee \psi}{\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)} (\neg I)} (\neg I) \\
 \hline
 \frac{\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)}{\neg B}
 \end{array}$$



- (b) Zeigen Sie, dass  $\{p_1 \vee (p_2 \vee p_3)\} \vdash (p_1 \vee p_2) \vee p_3$  gilt, indem Sie die folgende Deduktion vervollständigen.

**Solution:**

$$\frac{\frac{\frac{[p_1]^1}{(p_1 \vee p_2)} \text{ (}\vee I_1\text{)}}{(p_1 \vee p_2) \vee p_3} \text{ (}\vee I_2\text{)} \quad \frac{\frac{[p_2]^2}{(p_1 \vee p_2)} \text{ (}\vee I_2\text{)}}{(p_1 \vee p_2) \vee p_3} \text{ (}\vee I_1\text{)} \quad \frac{[(p_2 \vee p_3)]^1}{(p_1 \vee p_2) \vee p_3} \text{ (}\vee I_2\text{)}}{\frac{[p_2]^2}{(p_1 \vee p_2) \vee p_3} \text{ (}\vee I_2\text{)}} \text{ (}\vee E(2)\text{)}} \text{ (}\vee E(1)\text{)}$$

Also gilt  $p_1 \vee (p_2 \vee p_3) \vdash (p_1 \vee p_2) \vee p_3$

**Aufgabe 8** .....

Werten Sie die folgenden Formeln für die jeweils angegebene Belegung aus.

- (a)  $p_1 \rightarrow (p_2 \wedge p_3)$  für die  $K_3$ -Belegung mit  $B(p_1) = \frac{1}{2}, B(p_2) = 1$  und  $B(p_3) = 0$

**Solution:**  $B(p_1 \rightarrow (p_2 \wedge p_3)) = \max(\dots)$

- (b)  $(p_1 \vee p_2) \rightarrow (p_2 \wedge p_3)$  für die  $F$ -Belegung mit  $B(p_1) = 0.3, B(p_2) = 0.7$  und  $B(p_3) = 1$

**Solution:**  $B((p_1 \vee p_2) \rightarrow (p_2 \wedge p_3)) = \max(B(p_2 \wedge p_3), 1 - B(p_1 \vee p_2)) = \max(\min(B(p_2), B(p_3)), 1 - \max(B(p_1), B(p_2))) = \max(\min(0.7, 1), 1 - \max(0.3, 0.7)) = 0.7$

- (c)  $\neg(p_1 \rightarrow (p_2 \wedge p_3))$  für die  $B_R$ -Belegung mit  $B(p_1) = \mathbb{R}, B(p_2) = [1, \pi]$  und  $B(p_3) = [3, 42]$

**Solution:**  $B(\neg(p_1 \rightarrow (p_2 \wedge p_3))) = \mathbb{R} \setminus B(p_1 \rightarrow (p_2 \wedge p_3)) = \mathbb{R} \setminus (B(p_2 \wedge p_3) \cup (\mathbb{R} \setminus B(p_1))) = \mathbb{R} \setminus ((B(p_2) \cap B(p_3)) \cup (\mathbb{R} \setminus B(p_1))) = \mathbb{R} \setminus ([1, \pi] \cap [3, 42] \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus [3, \pi]$

- (d)  $p_1 \rightarrow (p_2 \wedge p_3)$  für die  $H_{mathbb{R}}$ -Belegung mit  $B(p_1) = \mathbb{R}_{>0}, B(p_2) = (-10, 5)$  und  $B(p_3) = (-20, -3)$

**Solution:**  $B(p_1 \rightarrow (p_2 \wedge p_3)) = \text{Inneres}(B(p_2 \wedge p_3), \mathbb{R} \setminus B(p_1)) = \text{Inneres}(B(p_1) \cap B(p_2), \mathbb{R} \setminus B(p_1)) = \text{Inneres}(\mathbb{R}_{\leq 0}) = \mathbb{R}_{<0}$

**Aufgabe 9** .....

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben

- (a) Entscheiden Sie welche der folgenden Paare  $\Gamma \Vdash_W \varphi$  erfüllen. Beweisen Sie Ihre Behauptung zum Beispiel durch Angabe einer Wahrheitstabelle.

- i.  $\Gamma = \{p_1 \rightarrow p_1\}, \varphi = p_1, W \in \{B, K_3\}$

**Solution:**

$p_1$	$p_2$	$p_1 \rightarrow p_2$	$\Gamma = \text{inf}\{p_1 \rightarrow p_2, \varphi\}$	$\Gamma \vdash p_2$
0	0	1	0	✓
0	$\frac{1}{2}$	1	0	✗
0	1	1	0	✓
$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	✗
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	✓
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	✓
1	0	0	0	✓
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	✓
1	1	1	1	✓

B Tautologie, keine  $K_3$  Tautologie

ii.  $\Gamma = \{p_1 \rightarrow p_2, p_1\}, \varphi = p_2, W \in \{B, K_3\}$

<b>Solution:</b>			
$p_1$	$p_2$	$p_1 \rightarrow p_2$	$p_1 \rightarrow p_2 \Vdash p_2$
w	w	w	w
w	0.5	w	w
w	f	f	w
0.5	w	w	w
0.5	0.5	w	w
0.5	f	f	w
f	w	w	f
f	0.5	w	f
f	f	w	f

iii.  $\Gamma = \{p_3 \vee (p_1 \wedge p_2)\}, \varphi = (p_3 \vee p_1) \wedge (p_3 \vee p_2), W \in \{B\}$

<b>Solution:</b>								
$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_1 \wedge p_2$	$p_3 \vee (p_1 \wedge p_2)$	$p_3 \vee p_1$	$p_3 \vee p_2$	$(p_3 \vee p_1) \wedge (p_3 \vee p_2)$	$p_3 \vee (p_1 \wedge p_2) \Vdash (p_3 \vee p_1) \wedge (p_3 \vee p_2)$
w	w	w	w	w	w	w	w	$\leftrightarrow$
w	w	f	w	w	w	w	w	$\leftrightarrow$
w	f	w	f	w	w	w	w	$\leftrightarrow$
w	f	f	f	f	w	f	f	$\leftrightarrow$
f	w	w	f	w	w	w	w	$\leftrightarrow$
f	w	f	f	f	f	w	f	$\leftrightarrow$
f	f	w	f	w	w	w	w	$\leftrightarrow$
f	f	f	f	f	f	f	f	$\leftrightarrow$

(b) Entscheiden Sie für  $W \in \{B, K_3\}$ , welche der folgenden Formeln W-Tautologie sind. Beweisen Sie Ihre Behauptung.

i.  $\neg(p_1 \wedge \neg p_1)$

<b>Solution:</b>
$B[\neg(p_1 \wedge \neg p_1)] = 1_b - \inf\{B(p_1), -B(p_1)\} = 1_B - 0_B = 1_B \Rightarrow B$ Tautologie für $K_3$ betrachte Belegung $B = \frac{1}{2}$ $K[\neg(p_1 \wedge \neg p_1)] = 1_b - \inf\{B(p_1), -B(p_1)\} = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow$ keine $K_3$ Tautologie $\Rightarrow$ Tautologie

ii.  $\neg(p_1 \wedge \perp)$

<b>Solution:</b>		
$p_1$	$p_1 \wedge \perp$	$\neg(p_1 \wedge \perp)$
w	f	w
f	f	w

$\Rightarrow$  Tautologie

iii.  $(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \rightarrow (p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3))$

<b>Solution:</b>						
$p_1$	$p_2$	$p_3$	$A = p_1 \vee p_2 \vee p_3$	$p_2 \rightarrow p_3$	$B = p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3)$	$A \rightarrow B$
w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	w
w	f	w	w	w	w	w
w	f	f	w	w	w	w
f	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w
f	f	f	f	w	w	w

⇒ Tautologie

**Aufgabe 10** .....

Wir erweitern die Aussagenlogik um den zweistelligen Operator  $\bar{\wedge}$  (nicht . . . und . . .).

- (a) Überlegen Sie sich, wie Sie eine Aussage „nicht ( $\varphi$  und  $\psi$ )“ beweisen bzw. in einem Beweis verwenden würden und geben Sie entsprechende Regeln ( $\bar{\wedge}I$ ) und ( $\bar{\wedge}E$ ) an. Hinweis: Orientieren Sie sich für ( $\bar{\wedge}E$ ) an der Regel ( $\vee E$ ) und nutzen Sie, dass  $\varphi \bar{\wedge} \psi \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$ .

**Solution:**

$\varphi$	$\psi$	$\varphi \bar{\wedge} \psi$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	w

$$\frac{\neg\varphi}{\neg(\varphi \wedge \psi)} (\bar{\wedge}I_1)$$

$$\frac{\neg\psi}{\neg(\varphi \wedge \psi)} (\bar{\wedge}I_2)$$

$$\frac{\neg(\varphi \wedge \psi)}{\varphi} (\bar{\wedge}E_1)$$

$$\frac{\neg(\varphi \wedge \psi)}{\psi} (\bar{\wedge}E_2)$$

- (b) Verwenden Sie die Regel aus Aufgabenteil (a), um zu zeigen, dass  $p_1 \bar{\wedge} \neg p_1$  ein Theorem ist.

**Solution:**

$p_1$	$\neg p_1$	$p_1 \wedge \neg p_1$	$\neg(p_1 \wedge \neg p_1)$
w	f	f	w
f	w	f	w

- (c) Beschreiben Sie die Semantik des Operators durch Angabe einer Funktion  $\bar{\wedge}_W$  wie auf den Folien 3.9ff für die Wahrheitswertebereiche  $W \in \{B, B_R, K_3, F\}$ .

**Solution:**

**Wahrheitswertebereich  $B$**   $a \bar{\wedge}_W b = \neg(a \wedge b) = \neg(\max(a, b))$

**Wahrheitswertebereich  $B_{\mathbb{R}}$**   $a \bar{\wedge}_W b = \neg(a \wedge b) = \neg(a \cup b)$

**Wahrheitswertebereich  $K_3$**   $a \bar{\wedge}_W b = \neg(a \wedge b) = \neg(\max(a, b))$

**Wahrheitswertebereich  $F$**   $a \bar{\wedge}_W b = \neg(a \wedge b) = \neg(\max(a, b))$

- (d) Überprüfen Sie, ob die Formel  $(p_1 \rightarrow p_2) \bar{\wedge} \neg p_1$  eine W-Tautologie ist für  $W \in \{B, K_3, B_R\}$ .

**Solution:**

$p_1$	$p_2$	$p_1 \rightarrow p_2$	$\neg p_1$	$(p_1 \rightarrow p_2) \bar{\wedge} \neg p_1$	
w	w	w	f	w	
w	0.5	w	f	w	
w	f	f	f	w	
0.5	w	w	0.5	f	
0.5	0.5	w	0.5	f	$\not\equiv$ Tautologie
0.5	f	f	0.5	w	
f	w	w	w	f	
f	0.5	w	w	f	
f	f	w	w	f	

- (e) Angenommen wir erweitern die Regeln des natürlichen Schließens um  $(\bar{\wedge}I)$  und  $(\bar{\wedge}E)$ . Geben Sie zum Beweis des Korrektheitslemmas für das natürliche Schließen und den Wahrheitswertebereich  $B$  den Induktionsschritt für diese Regeln an.

**Solution:**

- (f) Zeigen Sie per vollständiger Induktion über den Formelaufbau, dass es zu jeder aussagenlogischen Formel  $\varphi$  eine Formel  $\psi$  gibt, die nur  $\bar{\wedge}$  als Operator enthält und äquivalent zu  $\varphi$  ist,  $\varphi \equiv \psi$ .

**Solution:**

**Aufgabe 11** .....

Zeigen Sie (kurz) die folgenden Aussagen.

- (a) Die Formelmenge  $\{\varphi\}$  ist erfüllbar genau dann, wenn  $\neg\varphi$  kein Theorem ist.

**Solution:**  $\neg\varphi$  Theorem  $\leftrightarrow \neg\varphi$  B Tautologie  
 $\leftrightarrow B(\neg\varphi) = 1 - B(\varphi) = 1 \quad \forall$  B Bedingung  
 $\leftrightarrow \{\varphi\}$  erfüllbar

- (b) Wenn  $\varphi$  eine F-Tautologie ist, dann ist  $\perp$  eine Teilformel von  $\varphi$ .

**Solution:** zeige  $\perp$  keine Teilformel von  $\varphi \rightarrow \varphi$  keine  $K_3$  Tautologie. Idee: betrachte  $K_3$  Belegung  $B = \frac{1}{2}$ , zeige  $B(\varphi) = \frac{1}{2}$  induktiv

- (c) Das natürliche Schließen ist auch ohne die Regel  $(\perp)$  vollständig.

**Solution:** ersetze Deduktion durch Falsum

- (d) Für jede aussagenlogische Formel  $\varphi$  gibt es unendlich viele, paarweise verschiedene, äquivalente Formeln.

**Solution:** definiere Folge  $(\varphi)_{i \in \mathbb{N}}$  mit  $\varphi_1 = \varphi$  und  $\varphi_{i+1} = \varphi_i + \varphi$   
Idee: Kombination der Menge mit beliebige u.u. unendlich vielen Formeln  $\neg\perp$   
unendlich viele, da  $\wedge(\neg\perp)$  unendlich oft zusammenhängen kann  
paarweise verschieden, da  $\phi(\wedge(\neg\perp))^n \neq \phi(\wedge(\neg\perp))^m$   
äquivalent:  $\wedge(\neg\perp)$  ändert den Wert einer Formel nicht

**Aufgabe 12** .....

Sei  $T = (V, E, w)$  ein endlich verzweigter Baum mit Wurzelknoten und unendlich vielen Knoten.

- (a) Beschreiben Sie mit einer Formelmenge  $\Gamma_T$ , dass in  $T$  ein unendlicher Pfad von der Wurzel aus existiert. Verwenden Sie atomare Formeln  $\{p_v | v \in V\}$ , wobei  $p_v$  die intendierte Bedeutung „der Knoten  $v$  liegt auf einem unendlichen Pfad von der Wurzel aus“ hat.  
Hinweis: D.h.  $\Gamma_T$  ist eine Formelmenge, sodass die unendlichen Pfade von  $w$  aus in  $T$  genau die sind, die die Form  $\{v | B(p_v) = 1\}$  haben für eine passende Belegung  $B$  mit  $B(\gamma) = 1$  für alle  $\gamma \in \Gamma_T$ .

**Solution:**

- (b) Verwenden Sie den Kompaktheitssatz der Aussagenlogik um zu beweisen, dass  $T$  einen unendlichen Pfad von der Wurzel aus besitzt.  
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass  $T$  beliebig lange Pfade von der Wurzel aus besitzt.

**Solution:**

**Aufgabe 13** .....

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben!

- (a) Überprüfen Sie mittels Makierungsalgorithmus, ob die unten angegebene Folgerung gilt.

$$p_1 \wedge (p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_1 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee p_4) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \Vdash p_5$$

**Solution:** Markierungsalgorithmus M:

- Eingabe: Menge von Hornklauseln (Negationen auf linke Seite, Positive auf Rechte)
- Ausgabe:  $M(\Gamma) = \text{erfüllbar} \leftrightarrow \Gamma$  erfüllbar
- Grundlage:  $\Gamma \Vdash \varphi \leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg \varphi\}$  unerfüllbar
- $\{(p_1), (p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_5), (\neg p_1 \vee p_3), (\neg p_3 \vee p_4), (\neg p_1 \vee p_2), \neg p_5\}$
- Hornklauseln
  1.  $\neg \perp \rightarrow p_1$
  2.  $p_3 \wedge p_5 \rightarrow p_2$
  3.  $p_1 \rightarrow p_3$
  4.  $p_3 \rightarrow p_4$
  5.  $p_1 \rightarrow p_2$
  6.  $p_5 \rightarrow \perp$
- Markier-Algorithmus
  - $p_1$  für 1.
  - $p_3, p_4$  für 3.,5.
  - $p_4$  für 4.
  - keine Terme übrig, allg. Terminiert mit „erfüllbar“
- erfüllbar  $\rightarrow$  Folgerung falsch  $\rightarrow \Gamma \not\Vdash \varphi$

- (b) Überprüfen Sie mittels Makierungsalgorithmus, ob die folgende Formel eine Tautologie ist.

$$(p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (p_4 \wedge \neg p_1) \vee (p_2 \wedge \neg p_4) \vee \neg p_2 \vee p_4$$

**Solution:**

- $\varphi$  Tautologie  $\leftrightarrow \{\neg\varphi\}$  unerfüllbar
- $\phi = (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (p_4 \wedge \neg p_1) \vee (p_2 \wedge \neg p_4) \vee \neg p_2 \vee p_4$
- $\neg\phi = (\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_4 \vee p_1) \wedge (\neg p_2 \vee p_4) \wedge p_2 \wedge \neg p_4$
- Hornklauseln
  1.  $p_1 \wedge p_3 \rightarrow p_2$
  2.  $p_4 \rightarrow p_1$
  3.  $p_2 \rightarrow p_4$
  4.  $\neg\emptyset \rightarrow p_2$
  5.  $p_4 \rightarrow \perp$
- Markier-Algorithmus
  - $p_2$  für 4.
  - $p_4$  für 3.
  - wegen 5. bricht Algorithmus ab mit unerfüllbar
- Ausgabe unerfüllbar da  $p_4 \rightarrow \perp$ , also ist  $\phi$  Tautologie

**Aufgabe 14** .....

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben!

(a) Überprüfen Sie mittels SLD-Resolution, ob die unten angegebene Folgerung gilt.

$$p_1 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_4) \wedge (\neg p_1 \vee p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_6 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_2 \vee p_5 \vee \neg p_6) \Vdash \neg p_2 \vee (p_4 \wedge p_5)$$

**Solution:** SLD Resolution für  $B(M_1 \rightarrow \perp, M_2 \rightarrow \perp, \dots, M_n \rightarrow \perp)$  mit  $M_n \rightarrow \perp \in \Gamma$  und  $M_{ind} = M_n \wedge \{\varphi\} \wedge N$  für  $N \rightarrow \varphi \in \Gamma$ .  $M_n = \emptyset \Leftrightarrow \Gamma$  unerfüllbar

- Horn-Klauseln
  1.  $\emptyset \rightarrow p_1$
  2.  $p_1 \wedge p_2 \rightarrow p_4$
  3.  $p_1 \wedge p_4 \rightarrow p_3$
  4.  $p_3 \rightarrow p_6$
  5.  $p_6 \wedge p_2 \rightarrow p_5$
  6.  $\neg\perp \rightarrow p_2$
  7.  $p_4 \wedge p_5 \rightarrow \perp$
- SLD Mengen
  - aus 7.:  $M_1 = \{p_4, p_5\}$
  - aus 5.:  $M_2 = \{p_2, p_4, p_6\}$
  - aus 4.:  $M_3 = \{p_2, p_3, p_4\}$
  - aus 3.:  $M_4 = \{p_1, p_2, p_4\}$
  - aus 2.:  $M_5 = \{p_1, p_2\}$
  - aus 1.+6.:  $M_6 = \emptyset$
- $M = \emptyset \rightarrow \Gamma$  unerfüllbar  $\rightarrow \varphi_{links} \Vdash \varphi_{rechts}$

(b) Überprüfen Sie mittels SLD-Resolution, ob die folgende Formel eine Tautologie ist.

$$(p_2 \wedge \neg p_1 \wedge p_3) \vee (p_4 \wedge p_1 \wedge p_3) \vee (\neg p_4 \wedge p_1 \wedge p_2) \vee \neg p_3 \vee \neg p_2$$

**Solution:**

- Invertiere Formel für SLD
- Horn-Klauseln
  1.  $p_2 \wedge p_3 \rightarrow p_1$
  2.  $p_1 \wedge p_3 \wedge p_4 \rightarrow \perp$
  3.  $p_1 \wedge p_2 \rightarrow p_4$
  4.  $\neg \perp \rightarrow p_3$
  5.  $\neg \perp \rightarrow p_2$
- SLD Mengen
  - aus 2.:  $M_1 = \{p_1, p_3, p_4\}$
  - aus 1.:  $M_2 = \{p_2, p_3, p_4\}$
  - aus 3.:  $M_3 = \{p_1, p_2, p_3\}$
  - aus 1.:  $M_4 = \{p_2, p_3\}$
  - aus 4.+5.:  $M_5 = \emptyset$
- $M = \emptyset \rightarrow \{\neg\varphi\}$  unerfüllbar  $\rightarrow \varphi$  Tautologie

**Aufgabe 15** .....

Leiten Sie die folgenden Äquivalenzen her, Sie können die Äquivalenzen auf Folie 5.13 verwenden.

(a)  $a \rightarrow b \equiv \neg b \rightarrow \neg a$

**Solution:**  $a \rightarrow b \equiv \neg a \vee b \equiv b \vee \neg a \equiv \neg \neg b \vee \neg a \equiv \neg b \rightarrow \neg a$

(b)  $a \vee (a \wedge b) \equiv a$

**Solution:** nutze  $\alpha = \beta$  gdw  $\alpha \leftrightarrow \beta$  ist Theorem, gdw  $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha$  Theoreme

(c)  $\neg a \rightarrow \perp \equiv a$

**Solution:**  $\neg a \rightarrow \perp \equiv \neg \neg a \vee \perp \equiv a \vee \perp \equiv a \vee (a \wedge \neg a) \equiv a$

**Aufgabe 16** .....

Sei  $A$  eine endliche Menge. Der Wahrheitswertebereich  $B_A$  hat die Form  $(2^A, \subseteq, \rightarrow_2 A, \neg_2 A)$  mit  $\neg_{B_A}(X) = A \setminus X$  und  $\rightarrow_{B_A}(X, Y) = (A \setminus X) \cup Y$ . Zeigen Sie, dass natürliches Schließen für jeden Wahrheitswertebereich  $B_A$  korrekt ist. Hinweis: Führen Sie die Korrektheit für Wahrheitswertebereiche der Form  $B_A$  auf die Korrektheit für den Boole'schen Wahrheitswertebereich zurück.

**Solution:**

**Aufgabe 17** .....

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen!

- (a) Aus  $\Gamma \not\models_W \phi$  folgt  $\Gamma \models_w \neg\phi$  für jeden Wahrheitswertebereich  $W$ .

**Solution:**  $\Gamma = \{\neg\perp\}$ ,  $\varphi = p$ ,  $W = K_3$ ,  $K_3$  Belegung  $B = \frac{1}{2}$   
 $\rightarrow \inf B[\Gamma] = 1$  und  $B(\varphi) = B(p) = \frac{1}{2} \rightarrow f \not\models_{K_3} \varphi, \neg\varphi$

- (b) Es gibt eine Menge aussagenlogischer Formeln  $\Gamma$  und eine Formel  $\phi$  mit  $\Gamma \vdash \phi$  und  $\Gamma \vdash \neg\phi$ .

**Solution:**  $\Gamma = \{\perp\}$ ,  $\varphi$  beliebig, z.B.  $\varphi = \perp$

- (c) Angenommen, es gäbe eine aussagenlogische Formel  $\phi$  mit  $\emptyset \vdash \phi$  und  $\emptyset \vdash \neg\phi$ . Dann ist jede aussagenlogische Formel ein Theorem.

**Solution:** betrachte  $\psi$ , ist Deduktion für  $\emptyset \rightarrow \psi \rightarrow \psi$  Theorem

**Aufgabe 18** .....

Der Schnitt zweier  $B$ -Belegungen  $B_1, B_2$  sei  $B_1 \cap B_2$ , wobei  $B_1 \cap B_2(p_i) = \min(B_1(p_i), B_2(p_i))$  für alle atomaren Formeln  $p_i$ .

- (a) Zeigen Sie, dass Belegungen, die Horn-Formeln erfüllen unter Schnitt abgeschlossen sind, dass also für jede Horn-Formel  $\phi$  und  $B$ -Belegungen  $B_1, B_2$  gilt: Wenn  $B_1(\phi) = 1$  und  $B_2(\phi) = 1$ , dann auch  $B_1 \cap B_2(\phi) = 1$ .

**Solution:**

- (b) Verwenden Sie Aufgabenteil (a) um zu zeigen, dass  $\phi = \neg(p_1 \wedge p_2) \rightarrow (p_3 \vee p_4)$  keine Horn-Formel ist.

**Solution:**

**Aufgabe 19** .....

Seien  $x, y, z$  Variablen,  $P$  ein einstelliges Relationssymbol,  $Q$  ein zwei-stelliges Relationssymbol,  $a$  ein null-stelliges Funktionssymbol und  $f$  ein einstelliges Funktionssymbol. Geben Sie die freien Variablen der folgenden Formeln an. Welche der Formeln sind Sätze?

- (a)  $\forall x : Q(x, x) \rightarrow \exists x : Q(x, y)$

**Solution:**  $y$  frei  $\rightarrow$  kein Satz

- (b)  $P(f(x)) \rightarrow \exists x : P(x)$

**Solution:**  $x$  vorn frei  $\rightarrow$  kein Satz

- (c)  $P(a) \vee P(f(a))$

**Solution:** keine freien Variablen  $\rightarrow$  ist Satz

- (d)  $\exists z : (Q(z, x) \vee Q(y, z)) \rightarrow \exists y : (Q(x, y) \wedge Q(x, z))$

**Solution:**  $y$  vorn frei,  $z$  hinten frei  $\rightarrow$  kein Satz

**Aufgabe 20** .....

Sei  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  eine endliche, nicht-leere Menge von Variablen und  $\sum'$  eine endliche Signatur mit Relationen  $R_1, \dots, R_r$ , Funktionen  $f_1, \dots, f_k$  und  $ar$  entsprechende Stelligkeitsfunktion. Wir können die Menge  $PL(X)$  der prädikatenlogischen  $\sum'$ -Formeln mit Variablen aus  $X$  als eine formale Sprache über dem Alphabet  $\Sigma = \{\perp, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, (, ), \exists, \forall, =\} \cup \{, \} \cup X \cup \sum'$  auffassen. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für  $PL(X)$  an.

**Solution:**

$$G = (\{F, X', A, T\}, \sum, P, F)$$

$$F \rightarrow A | (F \wedge F) | (F \wedge F) | (F \rightarrow F) | \neg F | \forall X' F | \exists X' F$$

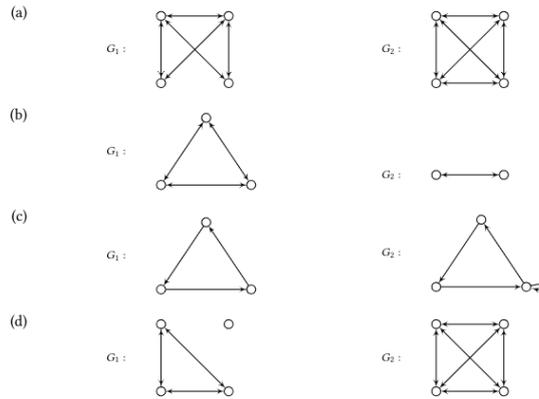
$$X' \rightarrow x_1 | \dots | x_n$$

$$A \rightarrow \perp | T = T | R_1(T, \dots, T) | \dots | R_r(T, \dots, T) \quad (R_1(T, \dots, T) \rightarrow T, \dots, T = ar(R_1))$$

$$T \rightarrow X' | f_1(T, \dots, T) | \dots | f_k(T, \dots, T)$$

**Aufgabe 21** .....

Geben Sie für jedes der folgenden Graphenpaare  $G_1, G_2$  einen prädikatenlogischen Satz an, sodass  $G_1$  Modell für diese Formel ist,  $G_2$  aber nicht.



**Solution:**

- a)  $\exists u, u' : (u \neq u' \wedge \neg E(u, u'))$
- b)  $\exists v, w, w' : (E(v, w) \wedge E(v, w') \wedge E(w, w') \wedge v \neq w \neq w')$
- c)  $\neg \exists v : E(v, v)$
- d)  $\exists v : \forall v' : \neg E(v, v')$

**Aufgabe 22** .....

Sei  $\Gamma$  die Signatur bestehend aus einem zwei-stelligen Relationssymbol  $\in$ . Für eine Menge von Mengen  $M$  definieren wir die Struktur  $S$  mit  $U_S = M$  und  $\in^S = \in$ . Geben Sie für jede der folgenden Aussagen eine Formel an, die diese beschreibt.

- (a) Es gibt eine Menge, die keine Menge enthält.

**Solution:**  $\exists M : \forall x : \neg(x \in M)$

- (b) Für alle Mengen  $A, B$  gibt es eine Menge, die genau  $A$  und  $B$  enthält.

**Solution:**  $\forall A, B : \exists C : \forall D : (D \in C \Leftrightarrow ((D = A) \vee (D = B)))$

- (c) Für jede Menge  $A$  gibt es eine Menge  $B$ , die genau die Elemente der Elemente der Menge  $A$  enthält.

**Solution:**  $\forall A : \exists B : \forall C : (C \in B \Leftrightarrow \exists D : (D \in A \wedge C \in D))$

**Aufgabe 23** .....

Sei  $\Gamma$  die Signatur bestehend aus einem zwei-stelligen Relationssymbol  $E$ . Für einen (gerichteten) Graphen  $G = (V, E)$  definieren wir dann die Struktur  $G$  mit  $V = U_G$  und  $E = E^G$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Aussage!

- (a)  $\{\exists x \exists y \exists z : (E(x, y) \wedge E(y, z) \wedge E(z, x))\}$  ist erfüllbar.

**Solution:** wahr: Steht ein erstes Element zu einem zweiten Element und dieses wiederum zu einem dritten Element in Relation, so steht auch das erste Element zum dritten Element in Relation. Z.B. folgt aus  $a < b$  und  $b < c$  stets  $a < c$ .

- (b)  $\{\exists x \forall y : E(x, y)\}$  ist erfüllbar, aber nicht allgemeingültig.

**Solution:** wahr. Es existiert ein Element, was in Relation zu allen anderen Elementen des Graphen steht, z.B. die Wurzel des Graphen.

- (c)  $\{\forall x \forall y : (E(x, y) \rightarrow \neg E(y, x))\} \Vdash \forall x \forall y : (E(x, y) \wedge E(y, x) \rightarrow x = y)$

**Solution:** wahr: Es gibt keine zwei verschiedenen Elemente, die in beiden Richtungen in Relation stehen, z.B. folgt aus  $a \leq b$  und  $b \leq a$  stets  $a = b$

- (d)  $\{\forall x \forall y : (E(x, y) \vee E(y, x))\} \Vdash \exists x \exists y : (E(x, y) \wedge \neg x = y)$

**Solution:** wahr: Je zwei verschiedene Elemente stehen stets auf genau eine Weise in Relation, z.B. wenn stets entweder  $a < b$  oder  $b < a$  gilt.

**Aufgabe 24** .....

Vervollständigen Sie die unten aufgeführte Deduktion, indem Sie die verwendeten Regeln angeben und gegebenenfalls temporäre Hypothesen kenntlich machen. Welche syntaktische Folgerung wird durch die Deduktion gezeigt?

**Solution:**

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\forall y : E(x, y)}{E(x, y)} (\forall\text{-E})}{\exists x : E(x, y)} (\exists\text{-I})}{\exists x \forall y : E(x, y)} (\exists\text{-E})}{\frac{\exists x : E(x, y)}{\forall y \exists x : E(x, y)} (\forall\text{-I})}{\exists x \forall y : E(x, y) \rightarrow \forall y \exists x : E(x, y)} (\rightarrow\text{-I})$$

Folgerung: die Reihenfolge von  $\exists$  und  $\forall$  ist innerhalb der selben Stufe irrelevant und kann vertauscht werden:  $\exists x \forall y \dots \rightarrow \forall y \exists x \dots$

**Aufgabe 25** .....

Sei  $\Sigma$  eine Signatur mit dem zweistelligen Funktionssymbol  $f$ . Zeigen Sie durch Angabe einer geeigneten Deduktion, dass für beliebige  $\Sigma$ -Terme  $s_1, s_2, t_1, t_2$  gilt:  $\{s_1 = t_1, s_2 = t_2\} \vdash f(s_1, s_2) = f(t_1, t_2)$ .

**Solution:**

$$\frac{\frac{f(s_1, s_2)}{f(t_1, s_2)} [s_1 = t_1]^1 (\text{GfG}^1)}{f(t_1, t_2)} [s_2 = t_2]^2 (\text{GfG}^2)$$

**Aufgabe 26** .....

Geben Sie für die folgenden (inkorrekten) Ableitungen je einen fehlerhaften Ableitungsschritt an. Begründen Sie!

$$(a) \frac{\exists x(x = a) \quad \frac{[x = a]^1}{\forall x(x = a)} (\forall\text{-I})}{\forall x(x = a)} (\exists\text{-E}^1)$$

**Solution:** Der Schritt  $\forall\text{-I}$  ist fehlerhaft, da  $x$  frei in  $x = a$  vorkommt.

$$(b) \frac{\frac{[\forall y(P(y, y))]^1}{\exists x \forall y(P(x, y))} (\exists\text{-I})}{\forall y(P(y, y)) \rightarrow \exists x \forall y(P(x, y))} (\rightarrow\text{-I}^1)$$

**Solution:**  $\exists\text{-I}$  ändert in der Hypothese  $y$  zu  $x$ , was nicht zulässig ist ( $P(y, y) \neq P(x, y)$ )

$$(c) \frac{\frac{[\exists x(P(x))]^2 \quad [P(x)]^1}{P(x)} (\exists\text{-E}^2) \quad \frac{P(x)}{\forall x(P(x))} (\forall\text{-I})}{\exists x(P(x)) \rightarrow \forall x(P(x))} (\rightarrow\text{-I}^1)$$

**Solution:**  $\forall\text{-I}$  fehlerhaft, aus  $\exists\text{-E}$  tritt  $x$  frei in Folgerung auf  $\rightarrow x$  freie Variable

**Aufgabe 27** .....

Wir betrachten die Formelmengemenge  $\Gamma = \{\exists B \forall C (\neg C \in B), \forall A \forall B \exists C (A \in C \wedge B \in C \wedge \forall D (D \in C \rightarrow C = A \vee C = B))\}$  und die Formel  $\varphi = \exists C \exists B \forall A (\neg A \in B \wedge B \in C)$  für die Signatur, die nur das zweistellige Relationssymbol  $\in$  enthält. Zeigen Sie, dass  $\Gamma \vdash \varphi$  gilt indem Sie eine Deduktion angeben.

**Solution:**

$\frac{\frac{\frac{\forall C (\neg C \in B)}{\neg A \in B} (\forall\text{-E})}{\forall A (\neg A \in B)} (\forall\text{-I})}{\exists B \forall C (\neg C \in B)} \quad \perp \quad (\exists\text{-E})}{\perp} (\text{raa})$	$\frac{\frac{\frac{\forall A \forall B \exists C (A \in B \wedge B \in C \wedge \psi)}{\forall B \exists C (A \in B \wedge B \in C \wedge \psi)} (\forall\text{-E})}{\exists C (A \in C \wedge B \in C \wedge \psi)} (\forall\text{-E})}{\perp} (\text{raa})$
$\frac{\perp}{\forall A (\neg A \in B)} (\forall\text{-E})$	$\frac{\perp}{(A \in C \wedge B \in C) \wedge \psi} (\wedge\text{-I})$
$\frac{\forall A (\neg A \in B)}{\neg A \in B} (\forall\text{-E})$	$\frac{\perp}{A \in C \wedge B \in C} (\wedge\text{-I})$
$\frac{\neg A \in B \wedge B \in C}{\forall A (\neg A \in B \wedge B \in C)} (\forall\text{-I})$	$\frac{\perp}{B \in C} (\wedge\text{-I})$
$\frac{\forall A (\neg A \in B \wedge B \in C)}{\exists B \forall A (\neg A \in B \wedge B \in C)} (\exists\text{-I})$	$\frac{\perp}{\exists C \exists B \forall A (\neg A \in B \wedge B \in C)} (\exists\text{-I})$

**Aufgabe 28** .....

Geben Sie zum Beweis des Korrektheitslemmas für das natürliche Schließen in der Prädikatenlogik den Induktionsschritt für den Fall  $(\exists - I)$  an.

**Solution:**  
Deduktion

$$\frac{\varphi[x := t]}{\exists x : \varphi} \quad (\exists\text{-I})$$

und  $[x := t]$  passt zu  $\varphi$ .

Nach IV gilt für alle Strukturen  $A$ ; VI  $\varrho : A \Vdash_{\varrho} T \rightarrow A \Vdash \varphi[x := t]$ .

Angenommen  $A \Vdash_{\varrho} T$ , nach Lemma 8.10  $A \Vdash_{\varrho} \varphi[x := \varrho[t]] \leftrightarrow A \Vdash_{\varrho[x := \varrho[t]]} \varphi$

$\rightarrow$  es existiert  $a \in U^A(a := \varrho[t]) : A \Vdash_{\text{varrho}[x:=a]} \varphi$

$\rightarrow A \Vdash_{\text{varrho}} \exists x : \varphi$

### Aufgabe 29

In dieser Aufgabe betrachten wir Mengen von Schließregeln. Wir sagen, dass eine Menge von  $R$  von Schließregeln verifizierbar ist, wenn es entscheidbar ist, ob in einer Deduktion ausschließlich Regeln aus  $R$  verwendet wurden. Beispielsweise sei  $R_{nat}$  die Menge der Regeln des natürlichen Schließens. In der Vorlesung haben wir bereits gesehen, dass  $R_{nat}$  verifizierbar ist.

Begründen Sie jeweils kurz, dass Ihre Regelmenge die entsprechenden Eigenschaften hat. Geben Sie je eine Mengen von Schließregeln an, die

- (a) nicht vollständig, aber korrekt und verifizierbar ist.

**Solution:**

$$R_a = \{(R)\}$$

- Nicht vollständig, da z.B.  $\forall x(x = x)$  nicht ableitbar mit Regeln aus  $R_a$
- Korrekt und verifizierbar, da  $R_a \in R_{nat}$

Alternativ: für Formel  $\varphi$  sei  $(\varphi)$  die Ableitungsregel  $\frac{\varphi}{\varphi} \rightarrow \{(\neg\perp)\}$ ,  $\neg\perp \wedge \neg\perp$  lässt sich nicht ableiten

- (b) vollständig, nicht korrekt, aber verifizierbar ist.

**Solution:**

$$R_L = \{(\perp), (F)\}, \text{ wobei } (F) \text{ die Regel } I^F.$$

- Vollständig, da  $\emptyset \vdash \epsilon$  f.o.  $\epsilon$  durch  $\frac{I}{\epsilon}$
- nicht Korrekt, da für jede Formel gilt  $\emptyset \vdash \epsilon$  und  $\emptyset \vdash \neg\epsilon$
- Verifizierbar, da jede Deduktion die Form  $\frac{I}{\epsilon}$  hat

Alternativ:  $\{(\varphi) : \varphi \text{ ist Formel}\}$  offensichtlich vollständig und nicht korrekt

- (c) vollständig und korrekt, aber nicht verifizierbar ist.

**Solution:**

$$R_c = \{(\Vdash)\} \text{ wobei } \frac{\Gamma}{\epsilon} \text{ gdw. } \Gamma \Vdash \epsilon$$

- Vollständig und Korrekt, da  $\Gamma \vdash \epsilon$  gdw  $\Gamma \Vdash \epsilon$
- nicht verifizierbar, da die Menge der allgemeingültigen Formeln ist nicht entscheidbar.

- $\epsilon$  allgemeingültig  $\Leftrightarrow \emptyset \Vdash \epsilon \Leftrightarrow \frac{0}{\epsilon}(I)$  ist eine Deduktion

Alternativ:  $\{(\varphi) : \varphi \text{ eine Tautologie}\}$  offensichtlich vollständig und korrekt aber nicht verifizierbar. Betrachte Menge von Deduktionen  $\{\frac{\varphi}{\varphi} : \varphi \text{ Formel}\}$  wäre R verifizierbar, so wäre entscheidbar ob  $\frac{\varphi}{\varphi} \in R$ , also ob  $\varphi$  Tautologie ist

### Aufgabe 30 .....

Wir betrachten die folgenden Sachverhalte:

- Vorlesungen werden von genau einem Professor gehalten.
- Studierende können Vorlesungen besuchen.
- Studierende können den Vortragsstil eines Professors mögen.
- Ein Studierender besucht eine Vorlesung genau dann, wenn er den Vortragsstil des Professors mag.
- Jedes Objekt ist entweder ein Studierender, ein Professor oder eine Vorlesung, aber nicht Mehreres davon zugleich.

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben!

- (a) Formalisieren Sie die angegebenen Sachverhalte in der Prädikatenlogik. Verwenden Sie dazu einstellige Relationssymbole  $P$ (rofessor),  $S$ (tudierender),  $V$ (orlesung) und zweistellige Relationssymbole  $H$ (ält die Vorlesung),  $M$ (ag den Vortragsstil),  $B$ (esucht die Vorlesung). Formalisieren Sie insbesondere auch zwischen welchen Objekten die Beziehungen  $H, M$  und  $B$  bestehen können.

#### Solution:

- $\forall v, p, p' : (V(v) \wedge P(p) \wedge P(p') \wedge H(p, v) \wedge H(p, v') \rightarrow p = p')$
- $\forall v, x : (V(v) \wedge B(x, v) \rightarrow S(x))$
- $\forall p, x : (P(p) \wedge M(x, p) \rightarrow S(x))$
- $\forall s, v, p : (S(s) \wedge V(v) \wedge P(p) \wedge H(p, v) \rightarrow (B(s, v) \leftrightarrow M(s, p)))$
- $\forall x : (S(x) \vee V(x) \vee P(x)) \wedge \neg((S(x) \wedge V(x)) \vee (S(x) \wedge P(x)) \vee (V(x) \wedge P(x)))$
- $\forall s, p : H(p, v) \rightarrow P(p) \wedge V(v)$
- $\forall s, v : B(s, v) \rightarrow S(s) \wedge V(v)$
- $\forall s, p : M(s, p) \rightarrow S(s) \wedge P(p)$

- (b) Wir sagen, dass zwei Objekte  $o_1$  und  $o_2$  äquivalent sind (in Zeichen  $o_1 \sim o_2$ ), wenn sie gleich sind oder vom gleichen Professor gehalten werden. Weisen Sie nach, dass die resultierende Relation  $\sim$  unter den gegebenen Voraussetzungen eine Kongruenz ist.

#### Solution: $\sim$ ist Kongruenz:

- Punkt 1, Äquivalenzrelation:
  - Reflexivität:  $\forall x(x \sim x)$ ; Sei  $o_1$  ein Objekt. Dann  $o_1 = o_1$ , also  $o_1 \sim o_1$
  - Symmetrie:  $\forall x \forall y(x \sim y \rightarrow y \sim x)$ ; Gelte  $o_1 \sim o_2$  gdw.  $o_1 = o_2$  oder  $\exists p(H(p, o_1) \wedge H(p, o_2))$  gdw.  $o_2 = o_1$  oder  $\exists p(H(p, o_2) \wedge H(p, o_1))$  gdw.  $o_2 \sim o_1$

– Transitivität:  $\forall x \forall y \forall z (x \sim y \wedge y \sim z \rightarrow x \sim z)$ ; Gelte  $o_1 \sim o_2$  und  $o_2 \sim o_3$ . Dann  $(o_1 = o_2$  oder  $\exists p(H(p, o_1) \wedge H(p, o_2))$ ) und  $(o_2 = o_3$  oder  $\exists p'(H(p', o_2) \wedge H(p', o_3))$ ). Falls  $o_1 = o_2$  oder  $o_2 = o_3$ , dann gilt  $o_1 \sim o_3$ . Ansonsten gilt  $\exists p(H(p, o_1) \wedge H(p, o_2)) \wedge \exists p'(H(p', o_2) \wedge H(p', o_3))$ . Da Vorlesungen von genau einem Professor gehalten werden gilt  $p = p'$ . Also werden  $o_1$  und  $o_3$  auch vom gleichen Professor gehalten. Somit  $o_1 \sim o_3$

- Punkt 2 gilt, da keine Funktionen in Signatur

- Punkt 3, Relationen:

– Seien  $a_1, b_1, \dots, a_k, b_k$  so dass  $a_1 \sim b_1, \dots, a_k \sim b_k$ . Gelte  $S(a_1)$  und  $a_1 \sim b_1$ . Also gilt  $a_1 = b_1$  oder  $\exists p(H(p, a_1) \wedge H(p, b_1))$ . Falls  $H(p, a_1)$ , dann gilt  $V(a_1)$  nach (ii) doch  $d_15$  widerspricht (vi). Daher muss  $a_1 = b_1$  gelten und somit  $S(b_1)$

– Für  $P(a_1)$  analog

– Gelte  $V(a_1)$  und  $a_1 \sim b_1$ . Falls  $a_1 = b_1$ , dann gilt  $V(b_1)$ . Ansonsten  $\exists p(H(p, a_1) \wedge H(p, b_1))$ . Also gilt  $V(b_1)$  nach (ii)

– Gelte  $M(a_1, a_2)$  und  $a_1 \sim b_1$  und  $a_2 \sim b_2$ . Es gilt  $S(a_1)$  und  $P(a_1)$ , also  $\neg V(a_1)$  und  $\neg V(a_2)$ . Somit gilt  $a_1 = b_1$  und  $a_2 = b_2$ , also  $M(b_1, b_2)$

– Gelte  $H(a_1, a_2)$  und  $a_1 \sim b_1$  und  $a_2 \sim b_2$ . Da  $H(a_1, a_2)$  gilt  $P(a_1)$  und  $V(a_2)$ .  $(a_1 = b_1$  oder  $\exists p(H(p, a_1) \wedge H(p, b_1))$ ) und  $(a_2 = b_2$  oder  $\exists p(H(p, a_2) \wedge H(p, b_2))$ ). Also gilt  $a_1 = b_1$ . Wenn  $a_2 = b_2$ , dann  $H(b_1, b_2)$ . Ansonsten  $\exists p(H(p, a_2) \wedge H(p, b_2))$ . Also gilt  $H(b_1, b_2)$

– Gelte  $B(a_1, a_2)$  und  $a_1 \sim b_1$  und  $a_2 \sim b_2$ .  $B(a_1, a_2)$  gdw  $\exists p(M(a_1, p) \wedge H(p, a_2))$  gdw  $\exists p(M(b_1, p) \wedge H(p, b_2))$  gdw  $B(b_1, b_2)$

- also ist  $\sim$  eine Kongruenz

**Aufgabe 31** .....

Sei  $\Sigma$  eine Signatur mit einem zweistelligen Relationssymbol  $E$ . Im Folgenden verstehen wir  $\Sigma$ -Strukturen  $G$  als unter Umständen unendliche, gerichtete Graphen  $G = (U_G, E^G)$ .

(a) Geben Sie für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine Formel  $\varphi_n$  an, sodass  $\psi_n$  die Klasse der Graphen axiomatisiert, in denen es einen Pfad der Länge  $n$  gibt.

**Solution:**  $\epsilon_n = \exists x_0 \exists x_1 \dots \exists x_n (\bigwedge_{0 \leq i < n} E(x_i, x_{i+1}))$

(b) Geben Sie eine unendliche Formelmengemenge  $\phi$  an, sodass  $G \models \Psi$  die Klasse der Graphen axiomatisiert, in denen es beliebig lange Pfade gibt.

**Solution:**  $\Phi = \{\epsilon_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

(c) Zeigen Sie mithilfe des Kompaktheitssatzes der Prädikatenlogik, dass es keinen  $\Sigma$ -Satz  $\psi$  gibt, der die Klasse der Graphen axiomatisiert, die nicht beliebig lange Pfade besitzen.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass es so einen Satz  $\psi$  gibt und leiten Sie aus der Unerfüllbarkeit von  $\phi \cup \{\psi\}$  mittels Kompaktheitssatz einen Widerspruch her.

**Solution:** Angenommen es gibt so einen Satz  $\Psi$ . Dann ist  $\Phi \cup \{\Psi\}$  unerfüllbar. Also existiert nach Kompaktheitssatz eine endliche Teilmenge  $\Phi' \subseteq \Phi \cup \{\Psi\}$ , die unerfüllbar ist. Sei  $m \in \mathbb{N}$  so, dass für alle  $\epsilon_n \in \Phi'$  gilt  $n \leq m$ . Betrachte die  $\Sigma$ -Struktur  $G = (U_G, E^G)$  mit  $U_G = \{0, 1, \dots, m\}$ ,  $E^G = \{(i, i+1) \mid 0 \leq i < m\}$ . Dann gilt  $G \models \epsilon_n$  für  $n \leq m$ . Außerdem gilt  $G \not\models \Psi$ . Also gilt  $G \models \Phi' \rightarrow$  Widerspruch zur Unerfüllbarkeit. Somit kann die Annahme nicht stimmen und so ein Satz *Psi* kann nicht existieren.

**Aufgabe 32** .....

Zeigen Sie für jede der folgenden Klassen von Strukturen, dass sie durch einen Satz, nur durch eine unendliche Formelmengung und nicht durch einen Satz oder auch nicht durch unendliche eine Formelmengung axiomatisiert werden kann. Wir betrachten wieder die Signatur  $\Sigma$  für Graphen.

- (a) Die Klasse der Graphen, die keinen Kreis der Länge 3 enthalten.

**Solution:** trivial

- (b) Die Klasse der endlichen Graphen.

**Solution:** lässt sich nicht durch ein  $\phi$  axiomatisieren. Angenommen es gibt ein solches  $\phi \rightarrow \phi$  hat Modell jeder endl. Größe  $\rightarrow \phi$  hat unendliches Modell  $\rightarrow$  Konflikt

- (c) Die Klasse der Graphen, die keinen Kreis, aber eine 5-Clique enthalten. Eine k-Clique ist eine Menge von k vielen Knoten in der zwischen jedem Knotenpaar eine Kante existiert.

**Solution:**  $\varphi = \perp$

- (d) Die Klasse der kreisfreien Graphen.

**Solution:**  $\phi = \{\neg\varphi_n, n \geq 1\} | G \models \varphi_n \leftrightarrow G$  hat Kreise der Länge n  $\rightarrow \phi$  axiomatisiert die Klasse der kreisfreien Graphen

- (e) Die Klasse der Graphen, die einen Kreis enthalten.

**Solution:** angenommen existiert  $\varphi$  mit Eigenschaften des kreisfreien Graphen  $\rightarrow \neg\varphi$  axiomatisiert Klasse der Graphen mit Kreis

- (f) Die Klasse der Graphen, die zu  $(2^{\mathbb{N}}, \emptyset)$  isomorph sind.

**Solution:**  $2^{\mathbb{N}}$  ist überabzählbar. Angenommen es existiert  $\phi$  mit  $m \rightarrow \phi$  erfüllbar  $\rightarrow \phi$  besitzt alg. Modell

**Aufgabe 33** .....

Sei  $f$  ein einstelliges Funktionssymbol und  $R$  ein zweistelliges Relationssymbol. Weiterhin sei

$$\varphi = \neg\exists x(R(x, f(x)) \wedge \forall y\exists x(R(y, x)))$$

- (a) Berechnen Sie eine Formel  $\psi_1$  in Pränexform, die äquivalent ist zu  $\varphi$ .

**Solution:**  $\neg\exists x((\forall y\exists x : R(y, x)) \wedge R(x, f(x))) = \neg\exists(\forall y'\exists x' : (R(y', x') \wedge R(x, f(x)))) = \forall x\exists y'\forall x' : \neg(R(y', x') \wedge R(x, f(x))) = \forall x\forall x' : \neg(R(g(x), x') \wedge R(x, f(x)))$  mit neuem 1-stelligem Funktionssymbol  $g$

- (b) Berechnen Sie eine Formel  $\psi_2$  in Skolemform, die erfüllbarkeitsäquivalent ist zu  $\varphi$ .

**Solution:**  $a = \exists x; b = \neg\exists z$   
 $\psi_2 = \forall y(R(b, f(b)) \wedge R(y, a))$

**Aufgabe 34** .....

Der Algorithmus zur Berechnung der Skolemform liefert für die Formel  $\exists x : P(x)$  das Ergebnis  $P(a)$  mit einer neuen Konstanten  $a$ . Zeigen Sie, dass diese beiden Formeln nicht äquivalent sind.

**Solution:** Die Variable  $x$  und Konstante  $a$  bilden für  $P$  nur logische Äquivalenz im Fall von  $x = a$ , sonst nicht. Die erfüllbarkeitsäquivalenz besteht dennoch, da dies nicht von einer bestimmten Variable  $x$  abhängt.

**Aufgabe 35** .....

Sei  $\Sigma$  die Signatur mit dem zweistelligen Relationssymbol  $R$ , der Konstante  $a$  und dem zweistelligen Funktionssymbol  $g$ . Gegeben sei weiterhin die folgende Formel:  $\varphi = \forall x \forall y : (R(x, g(x, y)) \vee R(x, a) \wedge (\neg R(y, x) \vee R(y, g(x, y))))$ . Geben Sie jeweils mindestens zwei Elemente des Herbrand-Universums und der Herbrand-Expansion an.

**Solution:**  $H_\varphi = \{a, g(a, a), R(a, a), R(g(a, a), a), \dots\}$   
 $E(\varphi)_1 = (R(a, g(a, a)) \vee R(a, a) \wedge (\neg R(a, a) \vee R(a, g(a, a))))$  mit  $[x/a][y/a]$   
 $E(\varphi)_2 = (R(g(a, a), g(g(a, a), a)) \vee R(g(a, a), a) \wedge (\neg R(a, g(a, a)) \vee R(a, g(g(a, a), a))))$  mit  $[x/g(a, a)][y/a]$

**Aufgabe 36** .....

Sei  $\Sigma$  die Signatur mit dem zweistelligen Relationssymbol  $R$  und den Konstanten  $a$  und  $b$ . Betrachten Sie die folgende Formel  $\varphi = \forall x \forall y : (R(a, b) \wedge (R(x, x) \rightarrow R(a, y)) \wedge \neg R(y, a))$ .

(a) Berechnen Sie die Herbrand-Expansion  $E(\varphi)$ .

**Solution:**  $H_\varphi = \{a, b, R(a, b), \dots\}$   
 $E(\varphi) = \{R(a, b) \wedge (R(x, x) \rightarrow R(a, y)) \wedge \neg R(y, a) \mid x, y \in H_\varphi\}$

(b) Überprüfen Sie, ob  $E(\varphi)$  aussagenlogisch erfüllbar ist.

**Solution:**  $D(\Sigma) \ni a, b$   
 $E(\varphi) :$   
 $R(a, b) \wedge (R(a, a) \rightarrow R(a, a)) \wedge \neg R(a, a)$   
 $R(a, b) \wedge (R(a, a) \rightarrow R(a, b)) \wedge \neg R(b, a)$   
 $R(a, b) \wedge (R(b, b) \rightarrow R(a, a)) \wedge \neg R(a, a)$   
 $R(a, b) \wedge (R(b, b) \rightarrow R(a, b)) \wedge \neg R(b, a)$   
 B Belegung  $B$  mit  $B(R(\begin{pmatrix} a \\ a \\ b \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \\ a \end{pmatrix})) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$   
 $\rightarrow$  aussagenlogisch nicht erfüllbar

**Aufgabe 37** .....

Sei  $\Sigma$  die Signatur mit dem einstelligen Relationssymbol  $P$ , der Konstante  $a$  und den einstelligen Funktionssymbolen  $f$  und  $g$ . Betrachten Sie die Formel  $\varphi = \forall x : (P(a) \wedge (P(x) \rightarrow P(f(x))) \wedge \neg P(g(x)))$ . Weiterhin sei  $A$  eine Struktur mit

- $U_A = \mathbb{Q}$ ,
- $P^A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,
- $a^A = 1$ ,
- $f^A(n) = n + 1$  für alle  $n \in \mathbb{Q}$  und
- $g^A(n) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{Q}$ .

Dann kann leicht  $A \models \varphi$  gezeigt werden. Konstruieren Sie aus  $A$  eine Herbrand-Struktur  $B$ , welche ebenfalls Modell für  $\varphi$  ist.

**Solution:**

$$H_\varphi = \{a, f(a), g(a), \dots\}$$

**Aufgabe 38** .....

Sei  $\Sigma$  eine Signatur mit zweistelligem Relationssymbol  $P$ , dem einstelligen Funktionssymbol  $g$ , dem zweistelligen Funktionssymbol  $f$  und den Konstanten  $a$  und  $b$ . Welche der folgenden Mengen von atomaren Formeln sind unifizierbar? Ermitteln Sie dazu mittels des Unifikationsalgorithmus einen Unifikator oder aber zeigen Sie, an welcher Stelle der Algorithmus mit der Ausgabe „nicht unifizierbar“ abbricht. Geben Sie im positiven Fall einen zweiten Unifikator an.

(a)  $\{P(y, f(a, z)), P(b, f(a, b))\}$

<b>Solution:</b>	$\varphi_1\sigma$	$\varphi_2\sigma$	$\sigma$
	$P(y, f(a, z))$	$P(b, f(a, b))$	$id$
	$P(b, f(a, z))$	$P(b, f(a, b))$	$id[y := b]$
	$P(b, f(a, b))$	$P(b, f(a, b))$	$id[y := b][z := b]$
Terminiert unifiziert			

(b)  $\{P(y, f(x, x)), P(b, f(a, y))\}$

<b>Solution:</b>	$\varphi_1\sigma$	$\varphi_2\sigma$	$\sigma$
	$P(y, f(x, x))$	$P(b, f(a, b))$	$id$
	$P(b, f(a, a))$	$P(b, f(a, b))$	$id[y := b][z := b]$
Terminiert nicht unifiziert			

(c)  $\{P(y, f(x, y)), P(g(z), f(a, z))\}$

<b>Solution:</b>	$\varphi_1\sigma$	$\varphi_2\sigma$	$\sigma$
	$P(y, f(x, y))$	$P(g(z), f(a, z))$	$id$
	$P(g(z), f(a, g(z)))$	$P(g(z), f(a, z))$	$id[y := g(z)][x := a]$
Terminiert nicht unifiziert			