Disclaimer

Aufgaben aus dieser Vorlage stammen aus der Vorlesung *Grundlagen und diskrete Strukturen* und wurden zu Übungszwecken verändert oder anders formuliert! Für die Korrektheit der Lösungen wird keine Gewähr gegeben.

Erlaubte Hilfsmittel: eine math. Formelsammlung/Nachschlagwerk, ein handbeschriebenes A4-Blatt mit Formeln und Ergebnissen aus der Vorlesung.

1. (a) Untersuche, welche der folgenden aussagenlogischen Ausdrücke logisch äquivalent sind. Begründe die Entscheidung.

$$\varphi = p \to (q \wedge \overline{r}),\ \psi = (p \to q) \wedge (r \to \overline{p}),\ y = (\overline{p} \vee q) \leftrightarrow r$$

Antwort:

$\varphi = p \to (q \wedge \overline{r})$

p	q	r	$q \wedge \overline{r}$	$p \to (q \wedge \overline{r})$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

$\psi = (p \to q) \wedge (r \to \overline{p})$

p	q	r	$p \to q$	$r \to \overline{p}$	$(p \to q) \wedge (r \to \overline{p})$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

$y = (\overline{p} \vee q) \leftrightarrow r$

p	q	r	$\overline{p} \vee q$	$(\overline{p} \vee q) \leftrightarrow r$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	1
1	1	1	0	0

(b) Negiere die Aussage: $\forall S \in \mathbb{R} \exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n > m \Rightarrow a_n > S$

Antwort: $\exists S \in \mathbb{R} \exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n > m \Rightarrow a_n < S$

(c) Negiere die Aussage: „In jeder GudS-Klausur gibt es mindestens eine Aufgabe, die von niemandem richtig gelöst wird"

Antwort: „Es gibt eine GudS-Klausur in der jemand jede Aufgabe richtig löst."

2. Es seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zwei Funktionen. Auf der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen wird wie folgt eine Relation definiert: $a \sim b \leftrightarrow f(a) - f(b) = g(a) - g(b)$. Weise nach, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Für den konkreten Fall $f(x) = x^2 + 1$ und $g(x) = 2x$ bestimme man die Äquivalenzklasse $[2]_{\backslash\sim}$

Antwort:

3. (a) Bestimme mit Hilfe des euklidischen Algorithmus ganze Zahlen a, b, für die gilt $1 = a * 100 + b * 23$

Antwort: $ggT(a, b) = a * x + b * y$

$\downarrow$: $b_i \to a_{i+1}$, $r_i \to b_{i+1}$

$\uparrow$: $x_i = y_{i+1}$, $y_i = x_{i+1} - q_i * y_{i+1}$

i	a	b	q (Teiler)	r(est)	x	y	Nebenrechnung $\downarrow$	Nebenrechnung $\uparrow$
1	100	23	4	8	3	-13	$100 - 23 * 4 = 8$	$100 * 3 + 23 * (-1 - 4 * 3) = 300 - 299 = 1$
2	23	8	2	7	-1	3	$23 - 2 * 8 = 7$	$23 * -1 + 8 * (1 - 2 * (-1)) = 1$
3	8	7	1	1	1	-1	$8 - 1 + 7 = 1$	$8 * 1 + 7 * (0 - 1 * 1) = 1$
4	7	1	7	0	0	1	$7 - 7 * 1 = 0$	$7 * 0 + 1 * 1 = 1$

Lösung: $a = 3$, $b = -13$

(b) Bestimme mit Hilfe des euklidischen Algorithmus ganze Zahlen a, b, für die gilt $1 = a * 23 + b * 17$

Antwort:

i	a	b	q	r	x	y
1	23	17	1	6	3	$-1 - 1 * 3 = -4$
2	17	6	2	5	-1	$1 - 2 * -1 = 3$
3	6	5	1	1	1	$0 - 1 * 1 = -1$
4	5	1	5	0	0	1

Lösung: $1 = -3 * 23 - 4 * 17 = 69 - 68 = 1$

(c) Untersuche, ob es ein multiplikativ inverses Element zu $\overline{23}$ in $\mathbb{Z}_{100}$ gibt und bestimme dieses gegebenfalls. Gebe außerdem ein nicht invertierbares Element außer $\overline{0}$ in $\mathbb{Z}_{100}$ an.

Antwort: multiplikativ inverses: $a^{-1} * a = 1$

die multiplikative Gruppe $\mathbb{Z}_n$ besteht aus den Elementen von $\mathbb{Z}_n$ die teilerfremd zu n sind. Für jedes $a \in \mathbb{Z}_n^*$ gilt $ggt(a, n) = 1$ und lässt sich als $1 = a * x + n * y$ darstellen $\Rightarrow$ $a^{-1} \equiv y(mod\ n)$

i	a	b	q	r	x	y
1	100	23	4	8	3	-13
2	23	8	2	7	-1	3
3	8	7	1	1	1	-1
4	7	1	7	0	0	1

$1 = 100 * 3 - 23 * 13 \Rightarrow \overline{23} = -13(mod\ 100)$

Alternativ: $a^{-1} * a = 1 \rightarrow a^{-1} = 1 \backslash a \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{23}$

4. Gegeben sei die Menge $G = \{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,3)} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Zeige, dass G eine Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation ist. Rechengesetze der Matrizenmultiplikation dürfen vorausgesetzt werden. Ist die Gruppe kommutativ? (ohne Beweis)

Antwort:

Eine nichtleere Menge G von Elementen $a, b, c, ...$ heißt Gruppe, wenn in ihr eine Operation $\circ$ erklärt ist, die folgenden Axiomen genügt:

- Die Operation $\circ$ ist assoziativ, d.h. für alle Elemente $a, b, c \in G$ gilt $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
- Die Operation $\circ$ ist umkehrbar, d.h. zu beliebigen Elementen $a, b \in G$ sind die Gleichungen $a \circ x = b$ und $y \circ a = b$ (mit $x \in G$ und $y \in G$) lösbar.

Man nennt G eine kommutative (oder abelsche) Gruppe, wenn zusätzlich noch gilt:

- Die Operation $\circ$ ist kommutativ, d.h. für alle $a, b \in G$ gilt $a \circ b = b \circ a$

Für die Matrizenmultiplikation von G gilt: $G * G = \begin{pmatrix} 1*1 + a*0 + b*0 & 1*a + a*1 + b*0 & 1*b + a*c + b*1 \\ 0*1 + 1*0 + c*0 & 0*a + 1*1 + c*0 & 0*b + 1*c + c*1 \\ 0*1 + 0*0 + 1*0 & 0*a + 0*1 + 1*0 & 0*b + 0*c + 1*1 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 2a & 2b + ac \\ 0 & 1 & 2c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Zeige dass die Einheitsmatrix Element von G ist.

Zeige dass die Verknüpfung in G assoziativ ist.

Begründe dass alle Matrizen in G invertierbar sind.

5. Markus ist politikinteressiert und möchte gerne Bundeskanzler werden. Er überlegt aber noch welcher Partei er beitritt. Er hat zwei Parteien A und B, die ihm gefallen, könnte aber auch eine eigene Partei C gründen. Die Chancen bei den nächsten Wahlen als Spitzenkandidat aufgestellt zu werden schätzt er auf 10% bei Partei A, auf 20% bei Partei B und 100% bei Partei C. Die Chance, dass die jeweilige Partei mit ihm an der Spitze die Wahl gewinnt liegt bei 60%, 45% bzw. 2%.

(a) Für welche Partei sollte er sich entscheiden, um mit maximaler Wahrscheinlichkeit Bundeskanzler zu werden?

Antwort: S: wird Spitzenkandidat, K: wird Bundeskanzler,

$P(A \cap S) = 0,1,\ P(B \cap S) = 0,2,\ P(C \cap S) = 1$

$P(A \cap K) = 0,6,\ P(B \cap K) = 0,45,\ P(C \cap K) = 0,02$

$P_A(S \cap K) = P(A \cap S) \cap P(A \cap K) = 0,1 * 0,6 = 0,06$

$P_B(S \cap K) = P(B \cap S) \cap P(B \cap K) = 0,2 * 0,45 = 0,09$

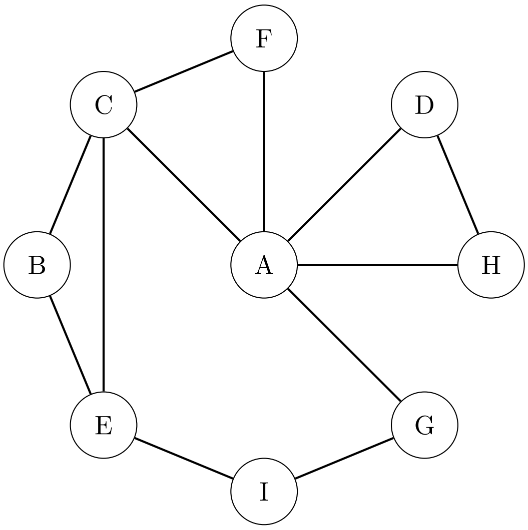
$P_C(C \cap K) = P(C \cap S) \cap P(C \cap K) = 1 * 0,02 = 0,02$

Markus hat bei Partei B die größten Chancen Bundeskanzler zu werden (mit 9%).

(b) Markus lässt die Würfel entscheiden. Bei 1 tritt er Partei A bei, bei 2 oder 3 Partei B und bei $4, 5$ oder 6 gründet er Partei C. Markus wird tatsächlich Bundeskanzler. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er dann Partei C gegründet.

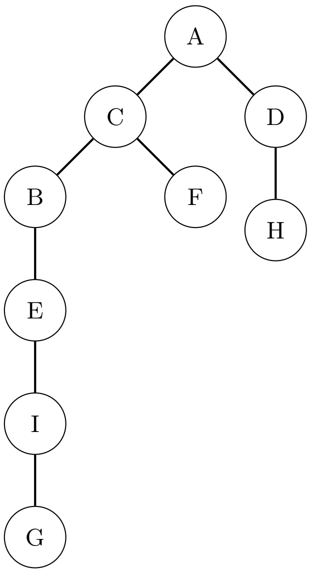
Antwort: $P(\text{Tritt A bei}) = \frac{1}{6}$, $P(\text{Tritt B bei}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(\text{Tritt C bei}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
$P_{\text{Tritt C bei}}(\text{C gewinnt mit ihm}) = \frac{P_C(C \cap K)}{P(\text{Tritt C bei})} = \frac{0{,}02}{0{,}5} = 0,04$
Wenn Markus Bundeskanzler wird, hat er mit 4% Wahrscheinlichkeit seine eigene Partei C gegründet.

6. Gegeben sei folgender Graph:



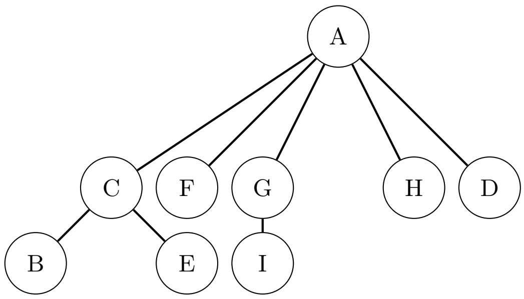
(a) Gebe einen Tiefensuchbaum mit Startecke A für den Graphen an.

Antwort:



(b) Gebe einen Breitensuchbaum mit Startecke A für den Graphen an.

Antwort:



(c) Zeige, dass für jede natürliche Zahl $k \geq 1$ gilt: Jeder Baum, der eine Ecke vom Grad k enthält, hat mindestens k Blätter.

Antwort:

Induktionsannahme: Es wird angenommen der Baum ist homogen verteilt, d.h. die Teilbäume jedes Baumes sind von gleicher Kantenlänge (Größe). Besitzt ein Teilbaum keinen Unterbaum, so ist er ein Blatt.

Induktionsstart: Für $k = 1$ besitzt ein Baum maximal 2^1 Kanten mit mindestens 1 Blatt. Daraus folgt $k = 1 = \sum Bltter$ stimmt

Induktionsschritt: Für $k = n+1$ besitzt ein Baum maxumal 2^{n+1} Kanten mit mindestens 1 Blatt. Daraus folgt $k = n+1$...