

## Disclaimer

Aufgaben aus dieser Vorlage stammen aus der Vorlesung *Grundlagen und diskrete Strukturen* und wurden zu Übungszwecken verändert oder anders formuliert! Für die Korrektheit der Lösungen wird keine Gewähr gegeben.

Erlaubte Hilfsmittel: eine math. Formelsammlung/Nachschlagwerk, ein handbeschriebenes A4-Blatt mit Formeln und Ergebnissen aus der Vorlesung.

1. (a) Untersuche, welche der folgenden aussagenlogischen Ausdrücke logisch äquivalent sind. Begründe die Entscheidung.

$$\varphi = p \rightarrow (q \wedge \bar{r}), \psi = (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \bar{p}), y = (\bar{p} \vee q) \leftrightarrow r$$

**Antwort:**

| $p$ | $q$ | $r$ | $q \wedge \bar{r}$ | $p \rightarrow (q \wedge \bar{r})$ |
|-----|-----|-----|--------------------|------------------------------------|
| 0   | 0   | 0   | 0                  | 1                                  |
| 0   | 0   | 1   | 0                  | 1                                  |
| 0   | 1   | 0   | 1                  | 1                                  |
| 0   | 1   | 1   | 0                  | 1                                  |
| 1   | 0   | 0   | 0                  | 0                                  |
| 1   | 0   | 1   | 1                  | 1                                  |
| 1   | 1   | 0   | 1                  | 1                                  |
| 1   | 1   | 1   | 0                  | 0                                  |

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \rightarrow q$ | $r \rightarrow \bar{p}$ | $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \bar{p})$ |
|-----|-----|-----|-------------------|-------------------------|----------------------------------------------------|
| 0   | 0   | 0   | 1                 | 1                       | 1                                                  |
| 0   | 0   | 1   | 1                 | 0                       | 0                                                  |
| 0   | 1   | 0   | 1                 | 1                       | 1                                                  |
| 0   | 1   | 1   | 1                 | 0                       | 0                                                  |
| 1   | 0   | 0   | 0                 | 1                       | 0                                                  |
| 1   | 0   | 1   | 0                 | 1                       | 0                                                  |
| 1   | 1   | 0   | 1                 | 0                       | 0                                                  |
| 1   | 1   | 1   | 1                 | 1                       | 1                                                  |

| $p$ | $q$ | $r$ | $\bar{p} \vee q$ | $(\bar{p} \vee q) \leftrightarrow r$ |
|-----|-----|-----|------------------|--------------------------------------|
| 0   | 0   | 0   | 0                | 1                                    |
| 0   | 0   | 1   | 0                | 0                                    |
| 0   | 1   | 0   | 1                | 0                                    |
| 0   | 1   | 1   | 1                | 1                                    |
| 1   | 0   | 0   | 0                | 1                                    |
| 1   | 0   | 1   | 0                | 0                                    |
| 1   | 1   | 0   | 0                | 1                                    |
| 1   | 1   | 1   | 0                | 0                                    |

- (b) Negiere die Aussage:  $\forall S \in \mathbb{R} \exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n > m \Rightarrow a_n > S$

**Antwort:**  $\exists S \in \mathbb{R} \exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n > m \Rightarrow a_n < S$

- (c) Negiere die Aussage: „In jeder GudS-Klausur gibt es mindestens eine Aufgabe, die von niemandem richtig gelöst wird“

**Antwort:** „Es gibt eine GudS-Klausur in der jemand jede Aufgabe richtig löst.“

2. Es seien  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  zwei Funktionen. Auf der Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen wird wie folgt eine Relation definiert:  $a \sim b \leftrightarrow f(a) - f(b) = g(a) - g(b)$ . Weise nach, dass  $\sim$  eine Äquivalenzrelation ist. Für den konkreten Fall  $f(x) = x^2 + 1$  und  $g(x) = 2x$  bestimme man die Äquivalenzklasse  $[2]_{\sim}$

**Antwort:**

3. (a) Bestimme mit Hilfe des euklidischen Algorithmus ganze Zahlen  $a, b$ , für die gilt  $1 = a * 100 + b * 23$

**Antwort:**  $ggT(a, b) = a * x + b * y$

$\downarrow: b_i \rightarrow a_{i+1}, r_i \rightarrow b_{i+1}$

$\uparrow: x_i = y_{i+1}, y_i = x_{i+1} - q_i * y_{i+1}$

| i | a   | b  | q (Teiler) | r(est) | x  | y   | Nebenrechnung $\downarrow$ | Nebenrechnung $\uparrow$                      |
|---|-----|----|------------|--------|----|-----|----------------------------|-----------------------------------------------|
| 1 | 100 | 23 | 4          | 8      | 3  | -13 | $100 - 23 * 4 = 8$         | $100 * 3 + 23 * (-1 - 4 * 3) = 300 - 299 = 1$ |
| 2 | 23  | 8  | 2          | 7      | -1 | 3   | $23 - 2 * 8 = 7$           | $23 * -1 + 8 * (1 - 2 * (-1)) = 1$            |
| 3 | 8   | 7  | 1          | 1      | 1  | -1  | $8 - 1 * 7 = 1$            | $8 * 1 + 7 * (0 - 1 * 1) = 1$                 |
| 4 | 7   | 1  | 7          | 0      | 0  | 1   | $7 - 7 * 1 = 0$            | $7 * 0 + 1 * 1 = 1$                           |

Lösung:  $a = 3, b = -13$

- (b) Bestimme mit Hilfe des euklidischen Algorithmus ganze Zahlen  $a, b$ , für die gilt  $1 = a * 23 + b * 17$

|                                              | i | a  | b  | q | r | x  | y                 |
|----------------------------------------------|---|----|----|---|---|----|-------------------|
|                                              | 1 | 23 | 17 | 1 | 6 | 3  | $-1 - 1 * 3 = -4$ |
| <b>Antwort:</b>                              | 2 | 17 | 6  | 2 | 5 | -1 | $1 - 2 * -1 = 3$  |
|                                              | 3 | 6  | 5  | 1 | 1 | 1  | $0 - 1 * 1 = -1$  |
|                                              | 4 | 5  | 1  | 5 | 0 | 0  | 1                 |
| Lösung: $1 = -3 * 23 - 4 * 17 = 69 - 68 = 1$ |   |    |    |   |   |    |                   |

- (c) Untersuche, ob es ein multiplikativ inverses Element zu  $\overline{23}$  in  $\mathbb{Z}_{100}$  gibt und bestimme dieses gegebenenfalls. Gebe außerdem ein nicht invertierbares Element außer  $\overline{0}$  in  $\mathbb{Z}_{100}$  an.

**Antwort:**

4. Gegeben sei die Menge  $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,3)} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ . Zeige, dass  $G$  eine Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation ist. Rechengesetze der Matrizenmultiplikation dürfen vorausgesetzt werden. Ist die Gruppe kommutativ? (ohne Beweis)

**Antwort:**

5. Markus ist politikinteressiert und möchte gerne Bundeskanzler werden. Er überlegt aber noch welcher Partei er beitrifft. Er hat zwei Parteien  $A$  und  $B$ , die ihm gefallen, könnte aber auch eine eigene Partei  $C$  gründen. Die Chancen bei den nächsten Wahlen als Spitzenkandidat aufgestellt zu werden schätzt er auf 10% bei Partei  $A$ , auf 20% bei Partei  $B$  und 100% bei Partei  $C$ . Die Chance, dass die jeweilige Partei mit ihm an der Spitze die Wahl gewinnt liegt bei 60%, 45% bzw. 2%.

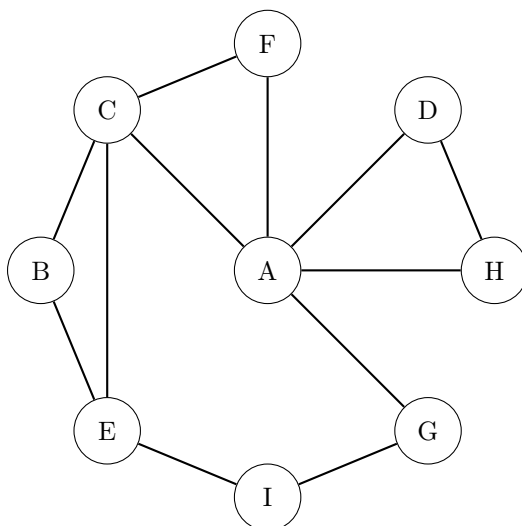
- (a) Für welche Partei sollte er sich entscheiden, um mit maximaler Wahrscheinlichkeit Bundeskanzler zu werden?

**Antwort:**

- (b) Markus lässt die Würfel entscheiden. Bei 1 tritt er Partei  $A$  bei, bei 2 oder 3 Partei  $B$  und bei 4, 5 oder 6 gründet er Partei  $C$ . Markus wird tatsächlich Bundeskanzler. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er dann Partei  $C$  gegründet.

**Antwort:**

6. Gegeben sei folgender Graph:



- (a) Gebe einen Tiefensuchbaum mit Startecke  $A$  für den Graphen an.

**Antwort:**

- (b) Gebe einen Breitensuchbaum mit Startecke  $A$  für den Graphen an.

**Antwort:**

- (c) Zeige, dass für jede natürliche Zahl  $k \leq 1$  gilt: Jeder Baum, der eine Ecke vom Grad  $k$  enthält, hat mindestens  $k$  Blätter.

**Antwort:**