

## Aussagen

Aussagen sind Sätze die wahr oder falsch sind, d.h. der Wahrheitswert ist wahr oder falsch.

**Verknüpfungen von Aussagen** Seien p und q Aussagen, dass sind folgende Sätze auch Aussagen -  $p \wedge q$  "und" -  $p \vee q$  "oder" -  $\neg p$  "nicht" -  $p \rightarrow q$  "impliziert" -  $p \leftrightarrow q$  "genau dann wenn"

### Wahrheitswerteverlauf

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
f	f	f	f	w	w	w
f	w	f	w	w	w	f
w	f	f	w	f	f	f
w	w	w	w	f	w	w

**Aussagenlogische Variablen** Variable die den Wert w oder f annimmt

**Aussagenlogische Formel** Verknüpfung aussagenloser Variablen nach obigen Muster

**Belegung** Zuordnung von w/f an jede Variable einer aussagenlogischer Formel

**Wahrheitswerteverlauf** Wahrheitswert der Aussagenformel in Abhängigkeit von der Belegung der Variable

**Tautologie** Formel deren Wahrheitswerteverlauf konstant w ist

**Kontradiktion** Formel deren Wahrheitswerteverlauf konstant f ist

**Kontraposition**  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$  ist eine Tautologie

**Modus Potens**  $(p \vee (p \rightarrow q)) \rightarrow q$  ist eine Tautologie

**Äquivalenz** Zwei Formeln p,q sind äquivalent (bzw logisch äquivalent) wenn  $p \leftrightarrow$  Tautologie ist. Man schreibt  $p \equiv q$ . Die Formel p impliziert die Formel q, wenn  $p \rightarrow q$  eine Tautologie ist

## Regeln

- $p \wedge q \equiv q \wedge p$  (Kommutativ)
- $p \vee q \equiv q \vee p$  (Kommutativ)
- $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$  (Assoziativ)
- $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$  (Assoziativ)
- $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$  (Distributiv)
- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$  (Distributiv)
- $\neg(\neg q) \equiv q$  (Doppelte Verneinung)
- $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$  (de Morgansche)

Aussagenformen in einer Variable x aus dem Universum U heißen Prädikate von U. Aussagenformen in n Variablen  $x_1, \dots, x_n$  aus dem Universum U heißen "n-stellige Prädikate" von U.

Seien p,q Prädikate über U

- $(\forall x : (p(x) \wedge q(x))) \leftrightarrow (\forall x : p(x) \wedge \forall x : q(x))$

- $\exists x : (p(x) \vee q(x)) \leftrightarrow (\exists x : p(x) \vee \exists x : q(x))$
- $\neg(\forall x : p(x)) \leftrightarrow \exists x : \neg p(x)$
- $\neg(\exists x : p(x)) \leftrightarrow \forall x : \neg p(x)$

Achtung: Verschiedenartige Quantoren dürfen nicht getauscht werden! gleichartige Quantoren dürfen getauscht werden

## Mengen

"Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens" Cantor Von jedem Objekt steht fest, ob es zur Menge gehört oder nicht.

**Wunsch 0** Es gibt eine Menge. Ist A irgendeine Menge, so ist  $x \in A : \neg(x = x)$  eine Menge ohne Elemente, die sogenannte leere Menge  $\emptyset$ .

**Wunsch 1** " $x \in y$ " soll Aussagenform über dem Universum U aller Mengen sein. D.h. für je zwei Mengen x und y ist entweder x ein Element von y oder nicht. D.h. " $x \in y$ " ist ein 2-stelliges Prädikat über U.

**Wunsch 2** Ist p(x) ein Prädikat über U, so soll es eine Menge geben, die aus genau denjenigen Mengen x besteht, für die p(x) wahr ist. Bezeichnung  $x : p(x)$  "ist - wahr". Danach gäbe es eine Menge M, die aus genau denjenigen Mengen x mit  $x \notin x$  besteht:  $M = x : x \notin x$ .

**Wunsch 2'** Ist A eine Menge und p(x) ein Prädikat über U, dann gilt es eine Menge B die aus genau denjenigen Mengen x aus A besteht, für die p(x) wahr ist. Bezeichnung:  $B = x \in A : p(x)$  wahr. Folgerung: die Gesamtheit aller Mengen ist selbst keine Menge, sonst findet man einen Widerspruch wie oben.

**Wunsch 3** Zwei Mengen x,y sind genau dann gleich wenn sie dieselben Elemente enthalten. D.h.  $x = y \leftrightarrow \forall z : (z \in x \leftrightarrow z \in y)$ . Somit gilt für zwei Prädikate p(x), q(x) über U und jede Menge A:  $x \in A : p(x)$  wahr  $= x \in A : q(x)$  wahr genau dann, wenn q(x), p(x) den gleichen Wahrheitswert für jedes x aus A haben.

**Wunsch 4** Zu jeder Menge A gibt es eine Menge B, die aus genau denjenigen Mengen besteht, die Teilmengen von A sind. Dabei ist x eine Teilmenge von  $y \leftrightarrow \forall z : (z \in x \rightarrow z \in y)$   $[x \subseteq y]$   $B = x : x \subseteq A = \wp(A)$  B heißt Potentmenge von A

### Teilmengen

A Teilmenge von B  $\leftrightarrow \forall x : (x \in A \rightarrow x \in B) \Rightarrow A \subseteq B$  A Obermenge von B  $\leftrightarrow \forall x : (x \in B \rightarrow x \in A) \Rightarrow A \supseteq B$  Folglich  $A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$  Schnittmenge von A und B:  $A \cap B = x : x \in A \wedge x \in B$  Vereinigungsmenge von A und B:  $A \cup B = x : x \in A \vee x \in B$

Sei eine Menge (von Mengen) dann gibt es eine Menge die aus genau den Mengen besteht, die in jeder Menge von A

enthalten sind (außer  $A = \emptyset$ ). Ebenso gibt es Mengen die aus genau den Mengen besteht, die in wenigstens einer Menge aus A liegen. Die Existenz dieser Menge wird axiomatisch gefordert in ZFC:  $UA = x : \exists z \in A : x \in z$

Seien A,B Mengen, dann sei  $A/B := x \in A : x \notin B = A \Delta B$  De Moorgansche Regel:  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$  und  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$  Das geordnete Paar (x,y) von Mengen x,y ist definiert durch  $x, x, y := x, y$  A und B Mengen:  $AxB := (x, y) : x \in A \wedge y \in B$

## Relationen

$A = Peter, Paul, Marry$  und  $B = C + +, Basic, Lisp : R \subseteq Ax B$ , etwa (Peter,c++),(Paul, C++), (Marry,Lisp). Seien A,B Mengen: Eine Relation von A nach B ist eine Teilmenge R von  $AxB$ .  $(x, y) \in R : x$  steht in einer Relation R zu y; auch  $xRy$  Ist  $A=B$ , so heißt R auch binäre Relation auf A

### binäre Relation

- Allrelation  $R := Ax A \subseteq Ax A$
- Nullrelation  $R := \emptyset \subseteq Ax A$
- Gleichheitsrelation  $R := (x, y) \dots x = y$
- $A = \mathbb{R}; R := ((x, y) \in \mathbb{R}x\mathbb{R}, x \leq y)$
- $A = \mathbb{Z}; R := (x, y) \in \mathbb{Z}x\mathbb{Z} : x$  ist Teiler von y kurz:  $x \mid y$

**Eigenschaften von Relationen** Sei  $R \in Ax A$  binäre Relation auf A

- Reflexiv  $\leftrightarrow xRx \forall x \in A$
- symmetrisch  $\leftrightarrow xRy \rightarrow yRx$
- Antisymmetrisch  $\leftrightarrow xRy \wedge yRx \rightarrow x = y$
- Transitiv  $\leftrightarrow xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$
- totale Relation  $\leftrightarrow xRy \vee yRx \forall x, y \in A$
- R heißt Äquivalenzrelation  $\leftrightarrow$  R reflexiv, symmetrisch und transitiv
- R heißt Ordnung  $\leftrightarrow$  R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv
- R heißt Totalordnung  $\leftrightarrow$  R Ordnung und total
- R heißt Quasiordnung  $\leftrightarrow$  R reflexiv und transitiv

**Äquivalenzrelation** Sei  $A$  Menge,  $C \subseteq \wp(A)$  Menge von Teilmengen von  $A$ .  $C$  heißt Partition von  $A$ , falls gilt: 1.  $UC = A$  d.h. jedes  $x \in A$  liegt in (wenigstens) einem  $y \in C$  2.  $\emptyset \notin C$  d.h. jedes  $y \in C$  enthält (wenigstens) ein Element von  $A$  3.  $X \cap Y = \emptyset$  f.a.  $X \notin Y$  aus  $C$

Zwei Mengen  $X \cap Y = \emptyset$  heißen disjunkt. Satz: Sei  $\sim$  Äquivalenzrelation auf  $A$ . Für  $x \in A$  betrachtet  $[x]_{\sim} := y \in A : y \sim x$ . Dann ist  $[x]_{\sim} : x \in A = C_{/\sim}$  Partition von  $A$ . Die Elemente  $[x]_{\sim}$  von  $C_{/\sim}$  heißen Äquivalenzklassen. Die Elemente von  $C$  heißen Teile, Klassen oder Partitionen. Somit ist  $\equiv$  (*modm*) eine Äquivalenzrelation. Ihre Äquivalenzklassen heißen Restklassen *mod m*. Ein Graph  $G = (V, E)$  ist ein Paar bestehend aus einer Menge  $V$  und  $E \subseteq (x, y : x \neq y \text{ aus } V)$ . Zu  $a, b \in V$  heißt eine Folge  $P = x_1, \dots, x_n$  von paarweise verschiedenen Ebenen mit  $a = x_0, b = x_j; x_{j-1}, x_i \in Ea * i \in b * j$  ein a,b-Weg der Länge  $l$  oder Weg  $a$  nach  $b$ . Durch  $a \sim b$  gibt es einen a,b-Weg in  $G$ , wird eine Äquivalenzrelation auf  $V$  definiert, denn:

- " $\sim$  reflexiv": es ist  $x \sim x$ , denn  $P = x$  ist ein x,x-Weg in  $G$
- " $\sim$  symmetrisch": aus  $x \sim y$  folgt, es gibt einen x,y-Weg  $\rightarrow$  es gibt einen y,x-Weg  $y \sim x$
- " $\sim$  transitiv": aus  $x \sim y$  und  $y \sim x$  folgt, es gibt einen x,y-Weg und einen y,x-Weg

Die Äquivalenzklassen von  $\sim_G$  erzeugen die Zusammenhangskomponenten von  $G$

Satz: Sei  $C$  eine Partition von  $A$ , dann wird durch  $x \sim_G y \leftrightarrow$  es gibt ein  $X \in C$  mit  $x, y \in X$  eine Äquivalenzrelation auf  $A$  definiert.

**(Halb) Ordnungen** Sei also *leq* eine Ordnung auf  $X$ . Seo  $A \subseteq X, b \in X$

- $b$  minimal in  $A \leftrightarrow b \in A$  und  $(c \leq b \rightarrow c = b)$  f.a.  $c \in A$
- $b$  maximal in  $A \leftrightarrow b \in A$  und  $(b \leq c \rightarrow b = c)$  f.a.  $c \in A$
- $b$  kleinstes Element in  $A \leftrightarrow b \in A$  und  $(b \leq c)$  f.a.  $c \in A$
- $b$  größtes Element in  $A \leftrightarrow b \in A$  und  $(c \leq b)$  f.a.  $c \in A$
- $b$  untere Schranke von  $A \leftrightarrow b \leq c$  f.a.  $c \in A$
- $b$  obere Schranke von  $A \leftrightarrow c \leq b$  f.a.  $c \in A$
- $b$  kleinste obere Schranke von  $A \leftrightarrow b$  ist kleinstes Element von  $(b' \in X : b' \text{ obere Schranke von } A)$  auch Supremum von  $A: \vee A = b$
- $b$  größte untere Schranke von  $A \leftrightarrow b$  ist das größte Element von  $(b' \in X : b' \text{ untere Schranke von } A)$  auch Infimum von  $A; \wedge A = b$

kleinstes und größtes Element sind jew. eindeutig bestimmt (falls existent)

Satz: Sei  $X$  Menge.  $\subseteq$  ist Ordnung auf  $\wp(X)$ . Ist  $O \subseteq \wp(X)$ , so ist  $\sup O = \bigcup O$  und  $\inf O = \bigcap O$

Satz: Die Teilbarkeitrelation  $\mid$  ist Ordnung auf den natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$ . Es gibt  $\sup(a, b) = \text{kgV}(a, b)$  (kleinstes gemeinsames Vielfaches) und  $\inf(a, b) = \text{ggT}(a, b)$  (größtes gemeinsames Vielfaches)

**Hesse Diagramm** Darstellung einer Ordnung  $\subseteq$  auf  $X$  1. Im Fall  $x \subseteq y$  zeichne  $x$  "unterhalb" von  $y$  in die Ebene 2. Gilt  $x \subseteq y (x \neq y)$  und folgt aus  $x \subseteq z \subseteq y$  stets  $x = z$  oder  $y = z$  so wird  $x$  mit  $y$  "verbunden"

**Zoonsche Lemma** Zu jeder Menge und für jede Ordnung  $\leq$  auf  $X$  mit der Eigenschaft, dass jede nicht-leere Kette nach der beschränkt ist, gibt es ein maximales Element.

**Wohlordnungssatz** Jede Menge lässt sich durch eine Ordnung  $\subseteq$  so ordnen, dass jede nichtleere Teilmenge von  $X$  darin ein kleinstes Element ist

## Induktion

$X$  ist eine Menge,  $X := X \vee X$   $M$  Menge heißt induktiv  $\leftrightarrow \emptyset \in M \wedge \forall X \in M \ X^+ \in M$ .

Ist  $O$  eine Menge von induktiven Mengen,  $O \pm O$  dann ist auch  $\bigcap O$  induktiv. Insbesondere ist der Durchschnitt zweier induktiver Mengen induktiv. Es gibt eine induktive Menge  $M: M = \bigcap A \in \wp(M) : A \text{ induktiv}$ . Sei  $M'$  irgendeine (andere) induktive Menge  $\rightarrow M \cap M'$  ist induktive Teilmenge von  $M$ .  $\mathbb{N}_M$  ist der Durchschnitt über alle induktiven Teilmengen von  $M$   $\mathbb{N}_M \subseteq M \cap M' \subseteq M'$ . Folglich ist  $\mathbb{N}_m$  Teilmenge jeder induktiven Menge.

**Satz I (Induktion I)** Sei  $p(n)$  ein Prädikat über  $\mathbb{N}$ . Gelte  $p(0)$  und  $p(n) \rightarrow p(n^+)$  f.a.  $n \in \mathbb{N}$  dann ist  $p(n)$  wahr f.a.  $n \in \mathbb{N}$ . Schreibe  $x = y : \leftrightarrow x \in y \vee x = y$

**Satz II (Induktion II)** Sei  $p(n)$  ein Prädikat über  $\mathbb{N}$ , gelte  $(\forall x < n : p(x)) \rightarrow p(n)$  f.a.  $n \in \mathbb{N}$ . Damit ist  $p(n)$  wahr für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

## Funktionen

Seien  $A, B$  Mengen: Eine Relation  $f \subseteq Ax B$  heißt Funktion.  $A$  nach  $B$  (" $f : A \rightarrow B$ ") falls es zu jedem  $x \in A$  genau ein  $y \in B$  mit  $(x, y) \in f$  gibt. Dieses  $y$  wird mit  $f(x)$  bezeichnet.

Satz:  $f : A \rightarrow B, g : A \rightarrow B$ ; dann gilt  $f = g \leftrightarrow f(x) = g(x)$ . Sei  $f : A \rightarrow B$  Funktion

- $f$  heißt injektiv  $\leftrightarrow$  jedes  $y$  aus  $B$  hat höchstens ein Urbild
- $f$  heißt subjektiv  $\leftrightarrow$  jedes  $y$  aus  $B$  hat wenigstens ein Urbild
- $f$  heißt bijektiv  $\leftrightarrow$  jedes  $y$  aus  $B$  hat genau ein Urbild

Ist  $f : A \rightarrow B$  bijektive Funktion, dann ist auch  $f^{-1} \subseteq Bx A$  bijektiv von  $B$  nach  $A$ , die Umkehrfunktion von  $f$ . Man nennt  $f$  dann Injektion, Surjektion bzw Bijektion

- $f$  injektiv  $\leftrightarrow (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$  f.a.  $x, y \in A$  oder  $(x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y))$
- $f$  surjektiv  $\leftrightarrow$  Zu jedem  $x \in B$  existiert ein  $x \in A$  mit  $f(x) = y$
- $f$  bijektiv  $\leftrightarrow f$  injektiv und surjektiv

Sind  $f : A \rightarrow B$  und  $g : B \rightarrow C$  Funktionen, so wird durch  $(g \circ f)(x) := g(f(x))$  eine Funktion  $g \circ f : A \rightarrow C$  definiert, die sog. Konkatenation/Hintereinanderschaltung/Verkettung/Verkopplung von  $f$  und  $g$  (gesprochen "g nach f").

Satz:  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$  sind Funktionen. Sind  $f, g$  bijektiv, so ist auch  $g \circ f : A \rightarrow C$  bijektiv

Satz: ist  $f : A \rightarrow B$  bijektiv, so ist  $f^{-1}$  eine Funktion  $B$  nach  $A$ . Mengen  $A, B$ , heißen gleichmächtig ( $|A| = |B| \equiv A \cong B$ ) falls Bijektion von  $A$  nach  $B$ .  $\cong$  ist auf jeder Menge von Mengen eine Äquivalenzrelation

- " $\cong$  reflexiv":  $A \cong A$ , denn  $f : A \rightarrow A, f(x) = X$ , ist Bijektion von  $A$  nach  $A$
- " $\cong$  symmetrisch": Aus  $A \cong B$  folgt Bijektion von  $A$  nach  $B \rightarrow B \cong A$
- " $\cong$  transitiv": Aus  $A \cong B$  und  $B \cong C$  folgt  $A \cong C$

$|A| = |A| : |A|$  ist die Kardinalität von  $A$ , d.h. die kleinste zu  $A$  gleichmächtige Ordinalzahl. Eine Ordinalzahl ist eine e-transitive Menge von e-transitiven Mengen. Eine Menge  $X$  heißt e-transitiv, wenn aus  $a \in b$  und  $b \in c$  stets  $a \in c$  folgt. Sei  $A := \mathbb{N}$  und  $B = 0, 2, 4, \dots = n \in \mathbb{N} : 2|n$ , dann sind  $A$  und  $B$  gleichmächtig, denn  $f : A \rightarrow B, f(x) = 2x$  ist Bijektion von  $A$  nach  $B$ . Eine Menge  $A$  heißt endlich, wenn sie gleichmächtig zu einer natürlichen Zahl ist; sonst heißt  $A$  unendlich. Eine Menge  $A$  heißt Deckend-unendlich, falls es eine Injektion  $f : A \rightarrow B$  gibt die nicht surjektiv ist.

Satz:  $A$  unendlich  $\leftrightarrow A$  deckend-unendlich  $A, B$  sind Mengen.  $A$  heißt höchstens so mächtig wie  $B$ , falls es eine Injektion von  $A$  nach  $B$  gibt.  $|A| \leq |B|$  bzw  $A \preceq B$ .  $\preceq$  ist Quasiordnung auf jeder Menge von Mengen.

- " $\preceq$  reflexiv": Injektion von  $A$  nach  $A$
- " $\preceq$  transitiv":  $A \preceq B$  und  $B \preceq C$  folgt Injektion  $f : A \rightarrow B$  und  $g : B \rightarrow C$ . Verkopplung  $g \circ f \rightarrow A \preceq C$

Satz (Vergleichbarkeitssatz): Für zwei Mengen  $A, B$  gilt  $|A| \leq |B|$  oder  $|B| \leq |A|$ . Eine Relation  $f$  von  $A$  nach  $B$  heißt partielle Bijektion (oder Matching), falls es Teilmengen  $A' \subseteq A$  und  $B' \subseteq B$  gibt sodass  $f$  eine Bijektion von  $A'$  nach  $B'$  gibt. Sei  $M$  die Menge aller Matchings von  $A$  nach  $B$  und wie jede Menge durch  $\subseteq$  geordnet. Sei  $K \subseteq M$  eine Kette von Matchings.  $K$  besitzt eine obere Schranke ( $\bigcup K$ ) in  $M$ . Seien  $(x, y); (x', y')$  zwei Zuordnungspfeile aus  $\bigcup K$ , zeige  $x \neq x'$  und  $y \neq y'$  dann folgt Matching. Jede Kette von Matchings benutzt eine obere Schranke, die ebenfalls ein Matching ist  $\rightarrow$  es gibt ein maximales Matching von  $A$  nach  $B$ , etwa  $h$ . Im Fall  $(x \in A, y \in B$  mit  $(x, y) \in h)$  ist  $h$  eine Injektion von  $A$  nach  $B$ , d.h.  $|A| \subseteq |B|$  andernfalls  $y \in B, x \in A$  mit  $x, y \in h$  ist  $h^{-1}$  eine Injektion von  $B$  nach  $A$ , d.h.  $|B| \subseteq |A|$ .

Satz (Cantor/Schröder/Bernstein): Für zwei Mengen  $A, B$  gilt: Aus  $|A| \subseteq |B|$  und  $|B| \subseteq |A|$  folgt  $|A| = |B|$ .

Satz (Cantor): Für jede Menge  $X$  gilt:  $|X| \subseteq \wp(X)$  und  $|X| \neq |\wp(X)|$ . Z.B. ist  $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ ; zu  $|\mathbb{N}|$  gleichmächtige Mengen nennt man abzählbar; unendliche nicht-abzählbare Mengen nennt man überzählbar.

**Kontinuitätshypothese** Aus  $|\mathbb{N}| \leq |A| \leq |\mathbb{R}|$  folgt  $|A| = |\mathbb{N}|$  oder  $|A| = |\mathbb{R}|$  (keine Zwischengrößen).

Seien  $M, I$  zwei Mengen. Eine Funktion  $f : I \rightarrow M$  von  $I$  nach  $M$  heißt auch Familie über der Indexmenge  $I$  auf  $M$ .

Schreibweise  $(m_i)_{i \in I}$  wobei  $m_i = f(i)$ . Familien über  $I = \mathbb{N}$  heißen Folgen (bzw. unendliche Folgen). Eine (endliche) Folge ist eine Familie über einer endlichen Indexmenge  $I$ . Funktionen von  $1, \dots, n$  in einer Menge  $A$  ( $a_1, \dots, a_n \in A$ ) heißen  $n$ -Tupel. Für eine Mengenfamilie  $(A_i)_{i \in A}$  sei ihr Produkt durch  $\prod A_i = (f : \text{Funktion von } I \text{ nach } \bigcup A_i \text{ mit } f(i) \in A_i \text{ f.a. } i \in I)$ . Ist allgemein  $A_i = A$  konstant, so schreibe  $\prod A_i = A^I = f : I \rightarrow A$ . Bezeichnung auch  $2^{\mathbb{N}}$ .

## Gruppen, Ringe, Körper

Eine Operation auf eine Menge  $A$  ist eine Funktion  $f : A \times A \rightarrow A$ ; Schreibweise  $xy$ . Eine Menge  $G$  mit einer Operation  $\circ$  auf  $G$  heißt Gruppe, falls gilt:

- $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$  freie Auswertungsfolge
- es gibt ein  $e \in G$  mit  $a \circ e = a$  und  $e \circ a = a$  f.a.  $a \in G$ .  $e$  heißt neutrales Element von  $G$  und ist eindeutig bestimmt
- zu jedem  $a \in G$  existiert ein  $b \in G$  mit  $a \circ b = e$  und  $b \circ a = e$ ; wobei  $e$  ein neutrales Element ist.  $b$  ist durch  $a$  eindeutig bestimmt, denn gäbe es noch ein  $c \in G$  mit  $a \circ c = e$  folgt  $b = b \circ e = b \circ (a \circ c) = (b \circ a) \circ c = e \circ c = c$ . Schreibweise für dieses eindeutig durch  $a$  bestimmte  $b$ :  $a^{-1}$

Eine Gruppe  $G$  mit  $\circ$  wird auch mit  $(G, \circ)$  bezeichnet. Sie heißt kommutativ bzw abelsch, falls neben 1., 2. und 3. außerdem gilt:

- $a \circ b = b \circ a$  f.a.  $a, b \in G$

Das neutrale Element aus 2. wird mit  $1$  bezeichnet. Im Fall der abelschen Gruppe benutzt man gerne "additive Schreibung": "+" statt " $\circ$ " und "0" statt "1" (Bsp:  $1 * a = a * 1 = a$ ). Eine Bijektion von  $X$  nach  $X$  heißt Permutation von  $X$ .  $(S_X, \circ)$  ist eine Gruppe.

Zwei Gruppen  $(G, \circ_G)$  und  $(H, \circ_H)$  heißen isomorph, falls es einen Isomorphismus von  $(G, \circ_G)$  nach  $(H, \circ_H)$  gibt (bzw. von  $G$  nach  $H$ ). Schreibweise  $(G, \circ_G) \cong (H, \circ_H)$

- " $\cong$  reflexiv":  $G \cong G$ , denn  $id_G$  ist ein Isomorphismus
- " $\cong$  symmetrisch": aus  $G \cong G$  folgt: es existiert ein bijektiver Homomorphismus
- " $\cong$  transitiv": sei  $G \cong H$  und  $H \cong J \rightarrow$  es gibt einen Isomorphismus  $\phi : G \rightarrow H$  und  $\psi : H \rightarrow J \rightarrow \phi \circ \psi : G \rightarrow J \rightarrow J$  ist bijektiv.  $\phi \circ G$  ist Homomorphismus von  $G$  nach  $J$  und bijektiv also Isomorph

Satz: Jede Gruppe  $(G, \circ)$  ist zu einer Untergruppe von  $(S_G, \circ)$  isomorph

**Arithmetik von  $\mathbb{N}$**   $+$  :  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  wird definiert durch:

- $m + 0 := m$  f.a.  $m \in \mathbb{N}$  (0 ist neutral)
- $m + n$  sei schon definiert f.a.  $m \in \mathbb{N}$  und ein gutes  $n \in \mathbb{N}$
- $m + n^+ := (m + n)^+$  f.a.  $m, n \in \mathbb{N}$

Satz:  $m + n = n + m$  f.a.  $m, n \in \mathbb{N}$  (Beweis induktiv über  $m$ )  
Satz:  $l + (m + n) = (l + m) + n$  f.a.  $l, m, n \in \mathbb{N}$  (Klammern sind neutral bzgl +)

Satz (Streichungsregel): aus  $a + n = b + n$  folgt  $a = b$  f.a.  $a, b, n \in \mathbb{N}$

**Analog: Multiplikation**  $*$  :  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  wird definiert durch:

- $m * 0 := 0$  f.a.  $m \in \mathbb{N}$
- $m * n^+ = m * n + m$  f.a.  $n \in \mathbb{N}$

Es gilt:

- $m * n = n * m$  f.a.  $n \in \mathbb{N}$
- $m * (n * l) = (m * n) * l$  f.a.  $m, n \in \mathbb{N}$
- $m * 1 = 1 * m = m$  f.a.  $m \in \mathbb{N}$
- $a * n = b * n \rightarrow a = b$  f.a.  $a, b \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- $a * (b + c) = a * b + a * c$  (Distributivgesetz)

**Die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$**  Durch

$(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow a + d = b + c$  wird eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  definiert. Die Äquivalenzklassen bzgl  $\sim$  heißen ganze Zahlen (Bezeichnung  $\mathbb{Z}$ , Bsp  $17 = [(17, 0)]_{/\sim}$ ). Wir definieren Operationen  $+$ ,  $*$  auf  $\mathbb{Z}$  durch:

- $[(a, b)]_{/\sim} + [(c, d)]_{/\sim} = [(a + c, b + d)]_{/\sim}$
- $[(a, b)]_{/\sim} * [(c, d)]_{/\sim} = [(ac + bd, ad + bc)]_{/\sim}$

Zu zeigen ist: Die auf der rechten Seite definierten Klassen hängen nicht von der Wahl der "Repräsentanten" der Klassen auf der linken Seite ab (Wohldefiniert).

Formal (für  $+$ ):  $[(a, b)]_{/\sim} = [(a', b')]_{/\sim}$  und  $[(c, d)]_{/\sim} = [(c', d')]_{/\sim}$  impliziert  $[(a, b)]_{/\sim} + [(c, d)]_{/\sim} = [(a' + c', b' + d')]_{/\sim}$ . Aus der Vss konstant kommt  $a + b' = b + a'$  und  $c + d' = c' + d$ . Dann folgt  $a + c + b' + d' = b + d + a' + c'$ , also  $(a + c, b + d) \sim (a' + c', b' + d')$ .

Satz:  $\mathbb{Z}$  ist eine abelsche Gruppe ( $+$  assoziativ, enthält neutrales Element, additiv Invers).  $[(a, 0)]_{/\sim}$  wird als  $a$  notiert.  $-[(a, 0)]_{/\sim} = [(0, a)]_{/\sim}$  wird als  $-a$  notiert. Anordnung:  $[(a, b)]_{/\sim} \subseteq [(c, d)]_{/\sim} \leftrightarrow a + d \leq b + c$   
Ein Ring  $\mathbb{R}$  ist eine Menge mit zwei Operationen  $+$ ,  $*$  :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit:

- $a + (b + c) = (a + b) + c$  f.a.  $a, b, c \in \mathbb{R}$
- Es gibt ein neutrales Element  $0 \in \mathbb{R}$  mit  $0 + a = a + 0 = a$  f.a.  $a \in \mathbb{R}$
- zu jedem  $a \in \mathbb{R}$  gibt es ein  $-a \in \mathbb{R}$  mit  $a + (-a) = -a + a = 0$
- $a + b = b + a$  f.a.  $a, b \in \mathbb{R}$

- $a * (b * c) = (a * b) * c$  f.a.  $a, b, c \in \mathbb{R}$
- $a * (b + c) = a * b + a * c$  f.a.  $a, b, c \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$  heißt Ring mit 1, falls:

- es gibt ein  $1 \in \mathbb{R}$  mit  $a * 1 = 1 * a = a$  f.a.  $a \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$  heißt kommutativ, falls:

- $a * b = b * a$  f.a.  $a, b \in \mathbb{R}$

Ein kommutativer Ring mit  $1 \neq 0$  heißt Körper, falls:

- zu jedem  $a \in \mathbb{R}$  gibt es ein  $a^{-1} \in \mathbb{R}$  mit  $a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$

Bemerkung:  $0$  kann kein multiplikativ inverses haben.

- Ist  $\mathbb{R}$  ein Körper, so ist  $\mathbb{R} * = \mathbb{R} / (0)$  mit  $*$  eine abelsche Gruppe.
- $\mathbb{Z}$  mit  $+$  und  $*$  ist ein kommutativer Ring mit  $1 \neq 0$  aber kein Körper
- $\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{R}$  mit  $+$  und  $*$  ist ein Körper

**Division mit Rest in  $\mathbb{Z}$**  Satz: Zu  $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ , gibt es eindeutig bestimmte  $q, r \in \mathbb{Z}$  mit  $a = q * b + r$  und  $0 \leq r < |b|$  (d.h.  $\mathbb{Z}$  ist ein euklidischer Ring). (Beweis über Induktion)

**Zerlegen in primäre Elemente** Satz: Jede ganze Zahl  $n > 0$  lässt sich bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen.

Beweis-Existenz mit Annahme: Der Satz gilt nicht, dann gibt es eine kleinste Zahl  $n$  die sich nicht als Produkt von Primzahlen schreiben lässt  $\rightarrow n$  weder Primzahl noch  $1 \rightarrow n = m * l$  für  $m, l > 1 \rightarrow m$  und  $l$  sind Produkte von Primzahlen  $\rightarrow m * l =$  Produkt von Primzahlen.

Eindeutigkeit mit Annahme: es gibt ein  $n > 0$  ohne eindeutige Primfaktorzerlegung (PFZ)  $\rightarrow$  es gibt ein kleinstes  $n > 0$  ohne eindeutige PFZ. Kommt eine Primzahl  $p$  in beiden Zerlegungen vor, so hat auch  $\frac{n}{p}$  zwei verschiedene PFZen.

Man erhält die PFZ von  $n' = (1_1 - p_1) * b$  aus den PFZen von  $q_1 - p_1$  und  $b$ . -i. Eindeutig bestimmbar.

**Arithmetik im Restklassenring in  $\mathbb{Z}$**  Sei  $m > 1$  gegeben,  $a \equiv b \pmod{m} \leftrightarrow m | a - b$  def. Relation auf  $\mathbb{Z}$ . Die Äquivalenzklasse zu  $a$  wird mit  $\bar{a}$  bezeichnet, d.h.

$\bar{a} = [a]_{\text{mod } m} = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv a \pmod{m}, \mathbb{Z}_m = \bar{a} : a \in \mathbb{Z}\}$ . Sei dazu  $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$  beliebig.

Division mit Rest  $\rightarrow$  es gibt eindeutig bestimmt  $q, r$  mit  $a = q * m + r$  und

$0 \leq r < m \rightarrow a - r = q * m \rightarrow m | a - r \rightarrow a \equiv r \pmod{m} \rightarrow \bar{a} = \bar{r}$ . Also tritt  $\bar{a}$  in der Liste  $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{m-1}$  auf. Aus  $0 \leq i < j < m - 1$  folgt  $\bar{i} \neq \bar{j}$ . In der Liste  $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{m-1}$  gibt es daher keine Wiederholungen  $\rightarrow |\mathbb{Z}_m| = m$ .

Wir definieren Operationen  $+$ ,  $*$  auf  $\mathbb{Z}_m$  durch  $\bar{a} + \bar{b} := \overline{a + b}$  und  $\bar{a} * \bar{b} := \overline{a * b}$  für  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Wohldefiniert: aus  $\bar{a} = \bar{a}'$  und  $\bar{b} = \bar{b}'$  folgt  $\overline{a + b} = \overline{a' + b'}$ . Analog für Multiplikation.

Eigenschaften von  $\mathbb{Z}$  mit  $+$ ,  $*$  werden auf  $\mathbb{Z}$  mit  $+$ ,  $*$  "vererbt", z.B. Distributivgesetz.

Satz: Sei  $m \geq 2$  dann ist  $\mathbb{Z}_m$  mit  $+, *$  ein kommutativer Ring mit  $\bar{1} \neq \bar{0}$ . Genau dann ist  $\mathbb{Z}_m$  sogar ein Körper, wenn  $m$  eine Primzahl ist.

Satz: Genau dann gibt es einen Körper mit  $n$  Elementen, wenn  $n$  eine Primzahl ist. D.h.. wenn  $n = p^a$  ist für eine Primzahl  $p$  und  $a \geq 1$ .

**Konstruktion von  $\mathbb{Q}$  aus  $\mathbb{Z}$**  Sei  $M = \mathbb{Z}x(\mathbb{Z}/0$  die Menge von Brüchen. Durch  $(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow ad = bc$  wird Äquivalenzrelation auf  $M$  durchgeführt. Schreibweise für die Äquivalenzklassen  $\frac{a}{b}$ . Die Elemente von  $\mathbb{Q} : \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$  heißen rationale Zahlen. Definiere Operationen  $+, *$  auf  $\mathbb{Q}$  wie folgt:

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{b*d}$  (wohldefiniert)
- $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a*c}{b*d}$

Satz:  $\mathbb{Q}$  mit  $+, *$  ist ein Körper.

Durch  $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$  wird eine totale Ordnung auf  $\mathbb{Q}$  definiert. Konstruktion von  $\mathbb{R}$  aus  $\mathbb{Q}$  mit Dedchinschnitten.

**Ring der formalen Potenzreihe** Sei  $K$  ein Körper (oder nur ein Ring mit  $1+0$ ). Eine Folge  $(a_0, a_1, \dots, a : n) \in K^{\mathbb{N}}$  mit Einträgen aus  $K$  heißt formale Potenzreihe. Die Folge  $(0, 1, 0, 0, \dots)$  wird mit  $x$  bezeichnet. Statt  $K^{\mathbb{N}}$  schreibt man  $K[[x]]$ .  $(0_0, a_1, a_2, \dots)$  heißt Polynom in  $x$ , falls es ein  $d \in \mathbb{N}$  gibt mit  $a_j = 0$  f.a.  $j < n$ . Die Menge aller Polynome wird mit  $K[x]$  bezeichnet.

Satz:  $K[[x]]$  wird mit  $+, *$  wie folgt zu einem kommutativen Ring mit  $1 \neq 0$

- $+$ :  $(a_0, a_1, \dots) + (b_0, b_1, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$
- $*$ :  $(a_0, a_1, \dots) * (b_0, b_1, \dots) = (c_0, c_1, \dots)$  mit  $c_k = \sum_{j=a}^k a_j * b_{k-j}$

Die formale Potenzreihe  $(a, 0, 0, 0, \dots)$  wird ebenfalls mit  $a$  bezeichnet.

Die bzgl  $\leq$  minimalen Elemente von  $B/\perp$  heißen Atom von  $B$ . Satz: Sei  $b \in B/\perp$  und  $a_1, \dots, a_k$  diejenigen Atome  $a$  mit  $a \leq b$ , dann ist  $b = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_k$ .

$B$  mit  $\vee, \wedge, \bar{\phantom{x}}$  und  $\dot{B}$  mit  $\dot{\vee}, \dot{\wedge}, \dot{\bar{\phantom{x}}}$  seien boolesche Algebren. Sie heißen isomorph, falls es einen Isomorphismus von  $B$  nach  $\dot{B}$  gibt, d.h. eine Bijektion  $\phi : B \rightarrow \dot{B}$  mit:

- $\phi(a \vee b) = \phi(a) \dot{\vee} \phi(b)$  f.a.  $a, b \in B$
- $\phi(a \wedge b) = \phi(a) \dot{\wedge} \phi(b)$  f.a.  $a, b \in B$
- $\phi(\bar{a}) = \dot{\bar{\phi(a)}}$  f.a.  $a \in B$

Satz (Stone): Ist  $B$  mit  $\vee, \wedge, \bar{\phantom{x}}$  eine boolesche Algebra,  $B$  endlich und  $A$  die Menge ihrer Atome, so ist  $B$  isomorph zur booleschen Algebra  $\wp(A)$  mit  $\cap, \cup, \bar{\phantom{x}}$ , wobei  $\dot{X} = A/X$ . Also ist in jeder Teilmenge  $X$  von  $A$  Bild eines Elements von  $B$  unter  $\phi$ . Satz:  $\perp, T$  sind durch die Bedingung 3 eindeutig bestimmt. Satz:  $\bar{a}$  ist durch die Bedingung 1,2,4 eindeutig bestimmt.

Lemma: Sei  $B$  mit  $\vee, \wedge, \bar{\phantom{x}}$  eine boolesche Algebra, dann gilt:

- Dominanz
- $- a \vee T = T$  f.a.  $a \in B$

$$- a \wedge \perp = \perp \text{ f.a. } a \in B$$

• Absorption

$$- a \vee (a \wedge b) = a \text{ f.a. } a, b \in B$$

$$- a \wedge (a \vee b) = a \text{ f.a. } a, b \in B$$

• Streichungsregel

$$- a \wedge x = b \wedge x \rightarrow a = b \text{ f.a. } a, b, c \in B$$

$$- a \wedge \bar{x} = b \wedge \bar{x} \rightarrow a = b \text{ f.a. } a, b, x \in B$$

• Assoziativität

$$- a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c \text{ f.a. } a, b, c \in B$$

$$- a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c \text{ f.a. } a, b, c \in B$$

• De Moorgansche Regel

$$- a \bar{\vee} b = \bar{a} \wedge \bar{b} \text{ f.a. } a, b \in B$$

$$- a \bar{\wedge} b = \bar{a} \vee \bar{b} \text{ f.a. } a, b \in B$$

Satz: Durch  $a \leq b : \leftrightarrow a \vee b = b$  wird eine Ordnung auf der booleschen Algebra  $B$  mit  $\vee, \wedge, \bar{\phantom{x}}$  definiert ( $a \vee b = \text{sup}a, b$ ;  $a \wedge b = \text{inf}a, b$ )

Es gilt  $a \vee b = b \rightarrow a \wedge b = a \wedge (a \vee b) = a$

- $a \vee b$  ist obere Schranke von  $a, b$ , d.h.  $a \leq a \vee b$ , dann  $a \vee (a \vee b) = a \vee b$
- $a \vee b$  ist kleinste obere Schranke, d.h.  $a \leq z$  und  $b \leq z$  folgt  $a \vee b \leq z$

Sind  $B, \dot{B}$  isomorph, so schreibe  $B \cong \dot{B}$ . Daraus folgt  $\dot{B} \cong B$  und aus  $B \cong \dot{B}$  und  $\dot{B} \cong \dot{\dot{B}}$  folgt  $B \cong \dot{\dot{B}}$ . Weiterhin besitzt jede boolesche Algebra mit genau  $n$  Atomen genau  $2^n$  viele Elemente (denn sie ist isomorph zur booleschen Algebra).

Beispiel: Sei  $X$  eine endliche Menge von Variablen. Eine aussagenlogische Formel  $F$  in  $X$  ist:

- atomar: "x" mit  $x \in X$  oder "f" oder "w" oder
- zusammengesetzt:  $(P \vee Q), (P \wedge Q), (\neg P)$  aus den Formeln  $P, Q$

Der Wahrheitswert von  $F$  unter der Belegung  $\beta : X \rightarrow \{f, w\}$  ergibt sich wie in Kapitel 1. Bezeichnung für den Wahrheitswert von  $F$  unter  $\beta : W_F(\beta)$ . Es gibt  $2^{|x|}$  Belegungen. Der Wahrheitswertverlauf ist die so definierte Funktion  $W_F : \{f, w\}^X \rightarrow \{f, w\}$ . Folglich gibt es  $2^{2^{|x|}}$  verschiedene Wahrheitswertverläufe für logische Formeln. Formeln  $F, F'$  heißen äquivalent, falls  $W_F = W_{F'}$   $\rightarrow$  es gibt  $2^{2^{|x|}}$  verschiedene Äquivalenzklassen aussagenlogischer Formeln in  $X$ . Die Äquivalenzklassen werden mit  $[F]_{/\equiv}$  bezeichnet.

Sei  $B := ([F]_{/\equiv} : F \text{ aussagenlogische Formel in } X)$  die Menge aller Äquivalenzklassen aussagenlogischer Formeln in  $X$ .

- $[P]_{/\equiv} \vee [Q]_{/\equiv} = [(P \vee Q)]_{/\equiv}$
- $[P]_{/\equiv} \wedge [Q]_{/\equiv} = [(P \wedge Q)]_{/\equiv}$
- $[P]_{/\equiv} \bar{\phantom{x}} = [-(P)]_{/\equiv}$

liefert die boolesche Algebra auf  $B$

- $\perp = [f]_{/\equiv} =$  Menge der Kontradiktionen von  $X$
- $T = [w]_{/\equiv} =$  Menge der Tautologien von  $X$

Ordnung  $\leq$  auf  $B$ :  $[P]_{/\equiv} \leq [Q]_{/\equiv} \leftrightarrow [P]_{/\equiv} \wedge [Q]_{/\equiv} \rightarrow$  Die Atome von  $B$  sind genau die Klassen zu Formel  $P$  mit  $W_P^{-1}(w) = 1$ . Kanonische Repräsentanten für diese Atome sind die Min-Terme. Zu jeder aussagenlogischen Formel  $f$  kann man die Atome  $[P]_{/\equiv}$  mit  $[P]_{/\equiv} \leq [f]_{/\equiv}$  betrachten, wobei  $P$  Min-Terme sind.

Satz: Jede Formel ist äquivalent zu einer Formel in DNF (disjunkte normal Form)

Coatome der booleschen Algebra  $B$  mit  $\vee, \wedge, \bar{\phantom{x}}$  := Atome der dualen booleschen Algebra  $\dot{B}$  mit  $\dot{\vee}, \dot{\wedge}, \bar{\phantom{x}}$

Ist  $b \in B$  und  $a_1, \dots, a_k$  die Coatome  $a$  mit  $b \leq a$  so gibt  $b = a_1 \wedge \dots \wedge a_k$ . Max-Terme sind "x<sub>1</sub>  $\vee$  ...  $\vee$  x<sub>k</sub>" und alle  $j$  die durch Ersetzung einiger  $x_j$  durch  $\bar{x}_j$  daraus hervorgehen und sind die kanonische Repräsentation der Coatome von  $B$ .

Satz: Jede aussagenlogische Formel ist äquivalent zu einer Formel in konjunktiver Normalform (KNF), d.h. zu einer Formel  $P_1 \wedge \dots \wedge P_n$ , worin die  $P_j$  Max-Terme sind.

## Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Ein (endlicher, diskreter) Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Paar  $(\Omega, p)$  bestehend aus einer endlichen Menge  $\Omega$  und einer Funktion  $p : \Omega \rightarrow [0, 1] \in \mathbb{R}$  mit  $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ . Jeder derartige  $p$  heißt (Wahrscheinlichkeits-) Verteilung auf  $\Omega$ . Die Elemente aus  $\Omega$  heißen Elementarereignis, eine Teilmenge  $A$  von  $\Omega$  heißt ein Ereignis; seine Wahrscheinlichkeit ist definiert durch  $p(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ .  $A = \emptyset$  und jede andere Menge  $A \subseteq \Omega$  mit  $p(A) = 0$  heißt unmöglich (unmögliches Ereignis).  $A = \Omega$  und jede andere Menge  $A \subseteq \Omega$  mit  $p(A) = 1$  heißt sicher (sicheres Ereignis). Es gilt für Ereignisse  $A, B, A_1, \dots, A_k$ :

- $A \subseteq B \rightarrow p(A) \leq p(B)$  denn  $p(A) = \sum p(\omega) \leq \sum p(\omega) = p(B)$
- $p(A \cup B) \rightarrow p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- Sind  $A_1, \dots, A_k$  paarweise disjunkt (d.h.  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ ) so gilt  $p(A_1 \cup \dots \cup A_k) = p(A_1) + \dots + p(A_k)$
- $p(\Omega/A) :=$  Gegenereignis von  $A = 1 - p(A)$
- $p(A_1, \dots, A_k) \leq p(A_1) + \dots + p(A_k)$

## Beispiel: Würfelwurf

- ungezinkt:
  - $\Omega = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
  - $p = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$
  - d.h.  $p(\omega) = \frac{1}{6}$  f.a.  $\omega \in \Omega$
- gezinkt:
  - $\Omega = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
  - $p = (\frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}) = (25\%, 10\%, 20\%, 25\%, 10\%, 10\%)$

$$- p(\omega \in \Omega : \omega \text{ gerade}) = p(2, 4, 6) = \frac{p(2) + p(4) + p(6)}{\frac{1}{10} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10}} = \frac{9}{20}$$

Satz: Sind  $(\Omega, p_1), \dots, (\Omega, p_m)$  Wahrscheinlichkeitsräume so ist durch  $p((\omega_1, \dots, \omega_m)) = \prod p_i(\omega_i)$  eine Verteilung auf  $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_m = (\omega_1, \dots, \omega_m) : \omega \in \Omega, f.a.i \in 1, \dots, m$ . Für  $A_1 \subseteq \Omega_1, A_2 \subseteq \Omega_2, \dots, A_m \subseteq \Omega_m$  gilt  $p(A_1 \times \dots \times A_m) = \prod p_i(A_i)$ .  $(\Omega, p)$  heißt Produktraum von  $(\Omega_1, p_1), \dots$

$(\Omega, p)$  Wahrscheinlichkeitsraum;  $A, B \in \Omega$  heißen (stochastisch) unabhängig, falls  $p(A \cap B) = p(A) * p(B)$ . Beispiel:  $p(A \cap B) = p(i, j) = p_1 i * p_2 j = p(A) * p(B)$  für das Ereignis "der 1. Würfel zeigt i, der 2. Würfel zeigt j"

### Bedingte Wahrscheinlichkeiten $(\Omega, p)$

Wahrscheinlichkeitsraum,  $B \subseteq \Omega$  ("bedingtes Ereignis") mit  $p(B) > 0$ , dann ist  $p_B : B \rightarrow [0, 1]; p_B(\omega) = \frac{p(\omega)}{p(B)}$  eine Verteilung auf B, denn

$\sum p_b(\omega) = \sum \frac{p(\omega)}{p(B)} = \frac{1}{p(B)} \sum p(\omega) = \frac{1}{p(B)} p(B) = 1$ .  $p_B$  ist die durch B bedingte Verteilung. Für  $A \subseteq \Omega$  gilt  $p_B(A \cap B) = \sum p_B(\omega) = \sum \frac{p(\omega)}{p(B)} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} := p(A|B)$  ("p von A unter B") bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter B.

Satz (Bayer):  $p(A|B) = \frac{p(B|A) * p(A)}{p(B)}$  wobei  $p_A, p_B \geq 0$

Satz (Totale Wahrscheinlichkeit): Seien  $A_1, \dots, A_k$  paarweise disjunkt,  $\bigcup A_j = \Omega, p(A_i) > 0, B \subseteq \Omega$ , dann gilt  $p(B) = \sum p(B|A_i) * p(A_i)$ .

Satz (Bayer, erweitert):  $A_1, \dots, A_k, B$  wie oben,  $p(B) > 0$ . Für  $i \in 1, \dots, k$  gilt  $p(A_i|B) = \frac{p(B|A_i) * p(A_i)}{\sum p(B|A_j) * p(A_j)}$

Beispiel: In einem Hut liegen drei beidseitig gefärbte Karten. Jemand zieht ("zufällig") eine Karte und legt sie mit einer ("zufälligen") Seite auf den Tisch. Karten rot/rot, rot/blau und blau/blau. Gegeben er sieht rot, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die andere Seite auch rot ist?  $p(\text{unten rot} - \text{oben rot}) = p(\text{unten rot und oben rot}) / p(\text{oben rot}) =$

$$\frac{p\left(\begin{smallmatrix} r \\ r \end{smallmatrix}\right)}{p\left(\begin{smallmatrix} r \\ r \end{smallmatrix}\right) + p\left(\begin{smallmatrix} r \\ b \end{smallmatrix}\right)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{2}{6} + \frac{2}{6}} = \frac{2}{3}$$

Eine Funktion  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt (reellwertige) Zufallsvariable. Weil  $\Omega$  endlich ist, ist auch  $X(\Omega) = X(\omega) : \omega \in \Omega \subseteq \mathbb{R}$  endlich. Durch  $p_x(x) := p(X = x) := p(\omega \in \Omega : X(\omega) = x)$  wird ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(X(\Omega), p_x)$  definiert; denn  $\sum p_x(x) = p(\Omega) = 1$ .  $p_x$  heißt die von X induzierte Verteilung.  $X(\Omega)$  ist meist erheblich kleiner als  $\Omega$ . Beispiel: Augensumme beim Doppelwurf:

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, X((i, j)) = i + j \rightarrow X(\Omega) = 2, 3, 4, \dots, 12$

Satz: Seien  $(\Omega_1, p_1), (\Omega_2, p_2)$  Wahrscheinlichkeitsräume und  $(\Omega, p)$  ihr Produktraum. Sei  $X : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}, Y : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ , fasse X, Y als ZVA in  $\Omega$  zusammen  $X((\omega_1, \omega_2)) = X(\omega_1)$  und  $Y((\omega_1, \omega_2)) = Y(\omega_2)$ ; d.h. X, Y werden auf  $\Omega$  "fortgesetzt". Dann sind X, Y stochastisch unabhängig in  $(\Omega, p)$  (und  $p(X = x) = p_1(X = x), p(Y = y) = p_2(Y = y)$ ).

**Erwartungswert, Varianz, Covarianz** Sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ZVA im Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, p)$ .

$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x p(X = x) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\omega)$  "E verhält sich wie Integral";  $E(x)$  heißt Erwartungswert von x. Linearität des Erwartungswertes:  $E(x + y) = E(x) + E(y)$  und  $E(\alpha x) = \alpha E(x)$ . Ist  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  konstant gleich c, so ist  $E(X) = \sum x * p(X = x) = c * p(X = x) = c * 1 = c$ . Die Varianz von X:  $Var(X) = E((X - E(X))^2)$  heißt Varianz von X (um  $E(X)$ ). Die Covarianz:  $Cov(X, Y) = E((X - E(X)) * (Y - E(Y)))$  heißt Covarianz von X und Y. Der Verschiebungssatz:  $Cov(X, Y) = E(X * Y) - E(X) * E(Y)$   $Var(X) = Cov(X, X) = E(X * X) - E(X)E(X) = E(X^2) - (E(X))^2$  Seien X, Y stochastisch unabhängig ( $\leftrightarrow p(X = x \wedge Y = y) = p(X = x) * p(Y = y)$ )  $E(X) * E(Y) = \sum_{x \in X(\Omega)} x * p(X = x) * \sum_{y \in Y(\Omega)} y * p(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xy * p(X = x) p(Y = y) = \sum_{Z \in \mathbb{R}} z * p(X * Y = Z) = E(X * Y)$ . Sind X, Y stochastisch unabhängig ZVA, so ist  $E(X) * E(Y) = E(X * Y)$ ; folglich  $Cov(X, Y) = 0$

Satz: Seien X, Y ZVA, dann gilt  $Var(X + Y) = Var(x) + Var(Y) + 2 * Cov(X, Y)$ . Sind insbesondere X, Y unabhängig gilt:  $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$ .

Sei  $(\Omega, p)$  Wahrscheinlichkeitsraum,  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  Zufallsvariable heißt Bernoulliverteilt im Parameter p falls  $p(X = 1) = p$  und  $p(X = 0) = 1 - p, p \in [0, 1]$ .  $E(X) = \sum x * p(X = x) = 1 * p(X = 1) = p$  Für  $X : \Omega \rightarrow 0, 1$  ist  $X^2 = X$ :  $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p) = p * q$

**Binominalkoeffizienten** Sei N eine Menge, dann ist  $\binom{N}{k} := (x \subseteq N : x \text{ hat genau } k \text{ Elemente } (|x| = k))$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $\binom{n}{k} := |(\binom{1, \dots, n}{k})|$ .

Satz:  $\binom{n}{0} = 1$  f.a.  $n \geq 0$   $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$  f.a.  $n \geq 0, k \geq 1, k \leq n - 1$

Jede n-elementige Menge N ist  $\binom{N}{0} = (\emptyset), \binom{N}{n} = N \rightarrow \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ . Den zweiten Teil der Behauptung zeigt man induktiv über n.

**Binominalsatz**  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$  für  $a, b \in \mathbb{R}$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $n! = n(n-1)(n-2) \dots * 3 * 2 * 1 = \prod i$ ; für  $n \in \mathbb{N}$  und  $k \geq 0$  sei  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Satz:  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$  für  $k \geq 1$  und  $k \leq n - 1$ . Zweiter Teil:  $[\binom{n-1}{k}] + [\binom{n-1}{k-1}] = \frac{n!}{k!(n-k)!} = [\binom{n}{k}]$ . Also stimmen die Rekursionsgleichungen von  $\binom{n}{k}$  und  $[\binom{n}{k}]$  überein sowie  $\binom{n}{k} = [\binom{n}{k}]$ . Folglich ist die Anzahl k-elementiger Teilmengen eine n-elementige Menge gleich  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige ZVAen, alle  $X_i$  seien Bernoulli-Verteilt im Parameter  $p \in [0, 1]$ , d.h.  $p(X_1 = 1) = p, p(X_i = 0) = (1 - p)$ . Dann ist  $X_i = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  ebenfalls reellwertige ZVA. Im Fall  $X_i : \Omega \rightarrow 0, 1$  ist  $X : \Omega \rightarrow 0, 1, \dots, n$ . Die Verteilung von X ergibt sich wie folgt, für  $k \in 0, 1, \dots, n$ :  $p(X = k) = \binom{n}{k} * p^k (1 - p)^{n-k}$

Eine ZVA heißt binominalverteilt in den Parametern n und p falls gilt:  $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$  für  $k \in 0, 1, \dots, n$ ; schreibe  $X \sim L(n, p)$ . Sonst ist X Bernoulliverteilt (genau dann wenn  $X \sim L(1, p)$ ).

**Erwartungswert und Varianz** Sei  $X \sim L(n, p)$  OBdA  $X = X_1 + \dots + X_n$  wobei  $X_i$  unabhängig und Bernoulliverteilt.  $E(X) = n * p, E(X_i) = p$   $Var(X) = n * p * (1 - p), Var(X_i) = p * (1 - p)$

**Multinomialverteilung**  $\binom{N}{k_1, \dots, k_r}$  sei Menge der Abbildungen  $f : N \rightarrow 1, \dots, r$  mit  $k_1, \dots, k_r \geq 0, k_1 + \dots + k_r = |N|$  und  $f^{-1}[j] = k_j \binom{N}{k_1, \dots, k_r} = |(\binom{N}{k_1, \dots, k_r})|$ .

**Hypergeometrische Verteilung** Beispiel: Urne mit zwei Sorten Kugeln; N Gesamtzahl der Kugeln, M Gesamtzahl Kugeln Sorte 1, N-M Gesamtzahl Kugeln Sorte 2,  $n \leq N$  Anzahl Elemente einer Stichprobe. X Anzahl der Kugeln Sorte 1 in einer zufälligen n-elementigen Stichprobe.

$p(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$  Eine ZVA  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt

hypergeometrisch Verteilt in den Parametern M, N, n falls  $p(X = k)$  für alle  $k \geq 0, k \leq M$  gilt.

$$E(X) = \sum_{x=0}^M \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \dots = n * \frac{M}{N}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dots = n * \frac{M}{N} (1 - \frac{M}{N}) (\frac{N-n}{N-1})$$

### Elementare Graphentheorie

$G = (V, E)$  heißt Graph mit Eckenmenge  $V(G) = V$  und Kantenmenge  $E(G) = E \subseteq x, y : x \neq y \in V$ .

Veranschaulichung als Punkte in der Ebene (V) mit "Verknüpfungslinien" von x nach y. Bsp  $G = (1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 15, 16)$ .

$P = x_0, \dots, x_e$  Folge pw verschiedener Ecken mit  $x_{i-1}, \dots, x_i \in E(k)$  für  $i \in 1, \dots, l$  heißt ein Weg von  $x_0$  nach  $x_e$  der Länge l. Für  $(a, b) \in V(G)$  heißt

$d_G(a, b) = \min(l : \text{es gibt einen a,b-Weg der Länge } l)$  Abstand von a nach b. Falls es keinen a,b-Weg gibt, definiere  $d_G(a, b) = +\infty$ .

$a \sim b \leftrightarrow$  es gibt einen a,b-Weg in G wird eine Äquivalenzrelation auf  $V(G)$  definiert. Die Äquivalenzklassen heißen (Zusammenhangs-) Komponenten von G.

G heißt zusammenhängend, wenn G höchstens eine Komponente besitzt.  $d_G : V(G) \times V(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  ist eine Matrix

- $d_G(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$  f.a.  $x, y \in V(G)$
- $d_G(x, y) = d_G(y, x)$  f.a.  $x, y \in V(G)$
- $d_G(x, z) \leq d_G(x, y) + d_G(y, z)$  f.a.  $x, y, z \in V(G)$

Für  $A \subseteq V(G)$  sei  $G[A] := (A, x, y \in E(G) : x, y \in A)$ . Für  $F \subseteq E(G)$  sei  $G[F] := (V(G), F)$ .  $G[A]$  bzw  $G[F]$  heißt von A bzw F induzierte Teilgraph. Ein Graph H mit  $V(H) \subseteq V(G)$  und  $E(H) \subseteq E(G)$  heißt Teilgraph von G, Schreibweise  $H \leq G$ .  $\leq$  ist Ordnung, denn:

- $G \leq G$

- $H \leq G \wedge G \leq H \rightarrow H = G$
- $H \leq G \wedge G = L \rightarrow H \leq L$

Ist  $P = x_0, \dots, x_p$  Weg, so heißt auch der Teilgraph ein Weg von  $x_0$  nach  $x_e$ . Graphen  $G, H$  heißen isomorph, falls es einen Isomorphismus von  $V(G)$  nach  $V(H)$  gibt. Das heißt eine Bijektion.  $V(G) \rightarrow V(H)$  mit  $f(x)f(y) \in E(H) \leftrightarrow x, y \in E(G)$ . Es gilt:

- $G \cong G$
- $G \cong H \rightarrow H \cong G$
- $G \cong H \wedge H \cong L \rightarrow G \cong L$

Eine Folge  $C = x_0, x_1, \dots, x_{l-1}$  von Ecken mit  $x_i, x_{i+1} \in E(G)$  für  $i \in 0, \dots, l-2$  und  $x_{l-1}x_0 \in E(G)$  heißt Kreis in  $G$  der Länge  $l$ , falls  $x_0, \dots, x_{l-1}$  pw verschieden sind. Bsp: Kreis der Länge 5.

Ein Teilgraph  $H$  des Graphen  $G$  (also  $H \leq G$ ) heißt aufspannend, falls  $V(H) = V(G)$ . Für eine Ecke  $x \in V(G)$  sei  $d_G(x) = |x, y \in E(G), y \in V(G)|$  die Anzahl der mit  $x$  indizierten Kanten, der sogenannte Grad von  $x$  in  $G$ . Weiter  $N_G(x) := x \in V(G) : xy \in E(G)$  die Menge der nachbarn von  $x$  in  $G$ . Hier gilt:  $|N_G(x)| = d_G(x)$ .

In jedem Graph  $G$  gilt  $\sum_{x \in V(G)} d_G(x) = 2|E(G)|$ . Der Durchschnittsgrad von  $G$  ist somit

$$d(\bar{G}) = \frac{1}{|V(G)|} \sum d_G(x) = \frac{2|E(G)|}{|V(G)|}.$$

Ein Graph ist ein Baum wenn  $G$  zusammenhängend und  $G-e$  nicht zusammenhängend für jedes  $e \in E(G)$  "G ist minimal zusammenhängend" Graph  $G$  ist ein Baum wenn  $G$  kreisfrei und Graph  $G+xy$  nicht kreisfrei für jedes  $xy \notin E(G)$   $G$  ist Baum, wenn

- $G$  ist kreisfrei und zusammenhängend
- $G$  kreisfrei und  $|E(G)| = |V(G)| - 1$
- $G$  zusammenhängend und  $|E(G)| = |V(G)| - 1$

Jeder Baum mit wenigstens einer Ecke besitzt eine Ecke vom Grad  $\leq 1$ , ein sog. Blatt ("jeder Baum besitzt ein Blatt").  $\rightarrow E(G) = |V(G)| - 1$  für jeden Baum also

$$d(G) = \frac{2|V(G)|-2}{|V(G)|} < 2.$$

$G$  Wald  $\leftrightarrow$  die Komponenten von  $G$  sind Bäume

$G$  Baum  $\leftrightarrow G$  ist zusammenhängender Wald

Ein Teilgraph  $H$  von  $G$  heißt Teilbaum von  $G$ , falls  $H$  ein Baum ist. Ein aufspannender Teilbaum von  $G$  heißt

Spannbaum von  $G$ .  $G$  zusammenhängend  $\leftrightarrow G$  Spannbaum.

Ein Spannbaum  $T$  von  $G$  heißt Breitensuchbaum von  $G$  bei  $x \in V(G)$  falls  $d_T(z, x) = d_G(z, x)$  f.a.  $z \in V(G)$ .

Ein Spannbaum  $T$  von  $G$  heißt Tiefensuchbaum von  $G$  bei  $x \in V(G)$  falls für jede Kante  $zy$  gilt:  $z$  liegt auf dem  $y, x$ -Weg in  $T$  oder  $y$  liegt auf dem  $z, x$ -Weg in  $T$ .

Satz: Sei  $G$  zusammenhängender Graph  $x \in V(G)$ .  $(X)$  sind  $x_0, \dots, x_{e-1}$  schon gewählt und gibt es ein  $+ \in (0, \dots, e-1)$  so, dass  $x_+$  einen Nachbarn  $y$  in  $V(G)$  ( $x_0, \dots, x_{e-1}$ ), so setze  $x_e = y$  und  $f(e) := t$ ; iteriere mit  $e+1$  statt  $e$ . Dann ist  $T := (x_0, \dots, x_e, x_j * x_{f(j)} : j \in 1, \dots, e)$  ein Spannbaum

- $(X)$  wird in  $+$  stets kleinstmöglich gewählt, so ist  $T$  ein Breitensuchbaum
- wird in  $(X)$   $+$  stets größtmöglich gewählt, so ist  $T$  ein Tiefensuchbaum

**Spannbäume minimaler Gewichte**  $G$  Graph,  $F \subseteq E(G)$  heißt kreisfrei, falls  $G(F)$  kreisfrei ist.

Lemma (Austauschlemma für Graphen): Seien  $F, F'$  zwei kreisfreie Kantenmengen in Graph  $G$  und  $|F| < |F'|$ , dann gibt es ein  $e \in F'/F$  so, dass  $F \vee e$  kreisfrei ist.

$G, \omega : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  (Gewichtsfunktion an den Kanten). Für  $F \subseteq E(G)$  sei  $\omega(F) = \sum \omega(e)$ , speziell  $\omega(\emptyset) = 0$ .

Für einen Teilgraphen  $H$  von  $G$  sei  $\omega(G) = \omega(E(G))$ . Ein Spannbaum minimalen Gewichts ist ein Spannbaum  $T$  von  $G$  mit  $\omega(T) \leq \omega(S)$  für jeden Spannbaum  $S$  von  $G$ .

Satz (Kruskal): Sei  $G$  zuständiger Graph,  $\omega : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ ; Setze  $F = \emptyset$ . Solange es eine Kante  $e \in E(G)/F$  gibt so, dass  $F \vee (e)$  kreisfrei ist, wähle  $e$  mit minimalem Gewicht  $\omega(e)$ , setze  $F = F \vee e$ , iterieren. Das Verfahren endet mit einem Spannbaum  $T = G(F)$  minimalen Gewichts.

Beweis: Weil  $G$  endlich ist endet das Verfahren mit einem maximal kreisfreien Graphen  $T$ . Seien  $e_1, \dots, e_n$  die Kanten von  $T$  in der Reihenfolge ihres Erscheinens, sei  $S$  Spannbaum minimalen Gewichts und  $f_1, \dots, f_m$  die Kanten in Reihenfolge aufsteigenden Gewichts. Angenommen (reductio ad absurdum)  $\omega(T) > \omega(S)$ . Dann gibt es ein  $i \in 1, \dots, m$  mit  $\omega(e_i) > \omega(f_i)$ . Wähle  $i$  kleinstmöglich, dann ist  $F = e_1, \dots, e_{i-1}$  und  $F' = f_1, \dots, f_i$  kreisfrei. Nach Austauschlemma gibt es ein  $f \in F'/F$  so, dass  $F \vee f$  kreisfrei ist. Also ist  $f$  ein Kandidat bei der Auswahl von  $e_i$  gewesen, also  $\omega(e_i) \leq \omega(f)$  (Fehler!). Folglich ist  $\omega(T) \leq \omega(S) \Rightarrow \omega(T) = \omega(S)$  also  $T$  und  $S$  Spannbaum mit minimalen Gewichten.

## Das Traveling Salesman Problem

$G$  sei Graph (vollständig) auf  $n$  Ecken, d.h.  $xy \in E(G) \forall x \neq y$  aus  $V(G)$  und  $\omega * E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ . Finde aufspannenden Kreis  $C$  von  $G$  minimalen Gewichts. Zusatzannahme (metrische TSP)

$\omega(xz) \leq \omega(xy) + \omega(yz)$ . Finde einen aufspannenden Kreis  $C$ , der um einen Faktor von höchstens zwei von einem aufspannenden Kreis  $D$  minimalen Gewichts abweicht ( $\omega(C) \leq 2\omega(D)$ ) sog. Approximationsalgorithmus mit Gütefaktor  $\leq$ .

Konstruiere eine Folge  $x_0, \dots, x_m$  mit der Eigenschaft, dass jede Kante von  $T$  genau zweimal zum Übergang benutzt wird, d.h. zu  $e \in E(T)$  existieren  $i \neq j$  mit  $e = x_i x_{i+1}$  und  $e = x_j x_{j+1}$  und zu jedem  $k$  existieren  $e \in E(T)$  mit  $e = x_k x_{k+1}$ . Das Gewicht dieser Folge sei  $\sum \omega(x_i x_{i+1}) = 2\omega(T)$ .

Eliminiere Mehrfachnennungen in der Folge. Gibt es  $i \neq j$  mit  $x_j = x_i$  so streiche  $x$  aus der Folge. Das Gewicht der neuen Folge ist maximal so groß wie das Gewicht der alten. Durch iteration erhält man einen aufspannenden Kreis mit  $\omega(X) \leq 2\omega(T)$ . Sei  $e$  Kante von  $D \rightarrow D - e = S$  ist aufspannender Weg  $\rightarrow \omega(T) \leq \omega(D - e) \leq \omega(D)$ .

$G$  Graph,  $k \geq 0$ . Eine Funktion  $f : V(G) \rightarrow C$  mit  $|C| \leq k$  heißt  $k$ -Färbung, falls  $f(x) \neq f(y)$  für  $xy \in E(G)$ .  $G$  heißt  $k$ -färbbar, falls  $G$  eine  $k$ -Färbung besitzt. Das kleinste  $k \geq 0$  für das  $G$   $k$ -färbbar ist heißt dramatische Zahl von  $G$ , Bezeichnung  $X(G)$ .

Satz (Tuga): Sei  $k \geq 2$  und  $G$  ein Graph ohne Kreise eine Lösung  $l \equiv 1 \pmod k$ , dann ist  $G$   $k$ -faltbar.  $G$  2-färbbar  $\leftrightarrow G$  hat keine Kreise ungerader Länge. Ein Graph heißt bipartit mit den Klassen  $A, B$  falls  $(x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in B \wedge y \in A)$  für alle  $xy \in E(G)$  gilt. Genau dann ist  $G$  bipartit mit gewissen Klassen  $A, B$  wenn  $G$  2-färbbar ist.

Satz (Hall): Sei  $G$  bipartit mit Klassen  $A, B$ . Dann gilt  $G$  hat ein Matching von  $A \leftrightarrow |N_G(X)| \leq |X|$  für alle  $X \subseteq A$ .

Satz: " $\rightarrow$ " sei  $M$  Matching von  $A$  in  $G \rightarrow |N_G(X)| \leq N_{G[M]}(X) = |X|$ . " $\leftarrow$ " Induktiv über  $|V(G)|$ . Ein schneller Zeuge für die Existenz eines Matchings von  $A$  im bipartiten Graphen  $G$  mit Klassen  $A, B$  ist das Matching selbst. Ein schneller Zeuge für die nicht-existenz eines Matchings ist ein  $X \subseteq A$  mit  $|N_G(X)| < |X|$ .

Das Entscheidungsproblem "hat ein bipartiter Graph ein Matching?" ist im NP und zugleich in co-NP. Also ist auch Problem "ist ein Graph 2-färbbar?" in NP und co-NP. Das Problem "ist ein Graph 3-färbbar?" ist in NP. Es ist sogar NP-vollständig, d.h. jedes Problem in NP (jedes Entscheidungsproblem mit schnellen Zeugen für Ja) lässt sich in Polynomialzeit in dieses Färbungsproblem überführen.